



РЕПУБЛИКА СЕВЕРНА МАКЕДОНИЈА
УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ", СКОПЈЕ
ФАКУЛТЕТ ЗА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И
ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ



Дрилон Бунјаку

Т Е М А

**Развој на нови алгоритми за наоѓање на оптимални
управувачи за дескрипторски системи и примена во
стабилизација и следење на квадрокоптер**

Докторска Дисертација

Скопје, Јуни 2019

Ментор:

Проф. Др. Јован СТЕФАНОВСКИ

Универзитет "Св. Кирил и Методиј" – Скопје
Факултет за Електротехника и Информациски Технологии
Институт за Автоматика и Системско Инженерство

Членови на комисијата:

Председавач: Проф. Др. Георги М. Димировски

1. Универзитет "Св. Кирил и Методиј" – Скопје
Факултет за Електротехника и Информациски Технологии
Институт за Автоматика и Системско Инженерство
2. Dogus University, Acibadem - Kadikoy,
TR-34722 Istanbul, Turkey

Проф. Др. Миле Станковски

Универзитет "Св. Кирил и Методиј" – Скопје
Факултет за Електротехника и Информациски Технологии
Институт за Автоматика и Системско Инженерство

Проф. Др. Dr. Đani Juričić

University of Ljubljana
Jožef Stefan Institute
Department of Systems and Control
Jamova cesta 39, SI-1000 Ljubljana, Slovenia

Проф. Др. Весна Ојлеска Латкоска

Универзитет "Св. Кирил и Методиј" – Скопје
Факултет за Електротехника и Информациски Технологии
Институт за Автоматика и Системско Инженерство

Датум на одбраната: _____

Датум на промоцијата: _____

Научна област: Автоматика и Системско Инженерство

ДРИЛОН БУНЈАКУ

Развој на нови алгоритми за наоѓање на оптимални управувачи за дескрипторски системи и примена во стабилизација и следење на квадкоптер

Резиме: Целта на оваа дисертација, во глобала, е елаборација на управувачки проблеми на дескрипторски системи и примена на дескрипторски типови на стабилизација. Придонесите на тезата се разноврсни. Поконкретно, со помош на генерализирана дескрипторска реализација на постројка, постигнато е ново практично и/или применливо решение на проблемот на управување со повратна спрега по излезот. Тоа решение на проблемот е изведено преку погодна трансформација на формулираниот проблем во управувачки проблем со генерализирана постројка дефинирана во состојбен простор. Овој нов пристап даде метод за наоѓање на оптимални управувачи за дескрипторски системи којшто ги поедноставува сите постоечки методи. Понатаму, дефинирани се релевантни услови за регуларност на дескрипторската генерализирана постројка, изразени со помош на податоците за зададените матрици. Понатаму, дизајниран е H_∞ управувач со поробусни својства во однос на постоечките H_∞ управувачи. Од практичен аспект, квадкоптерскиот систем е модифициран со употреба на диференцијалните и алгебарски равенки, на нов начин. Понатаму, презентирани се нови доволни услови за стабилност на нелинеарни дескрипторски системи со управување, кои се слични на условите за стабилност на Љапунов, и истите се применети во стабилизација на летот на квадкоптер. Најголемиот дел на резултатите се практични, бидејќи истите не бараат решавање на нелинеарни диференцијални равенки и нелинеарни алгебарски равенки. Специјално, при употреба на овие нови резултати се бара само диференцирање на функции.

Клучни зборови: Дескрипторски систем, оптимално управување, стабилизација на квадкоптер, робустно управување

DRILON BUNJAKU

**DEVELOPMENT OF NEW ALGORITHMS FOR FINDING OPTIMAL
CONTROLLERS FOR DESCRIPTOR SYSTEMS, AND APPLICATION
TO QUADCOPTER STABILIZATION AND TRACKING**

Abstract: The goal of this dissertation, in general, is dealing with control problems of descriptor systems and application to descriptor type system stabilization. The contribution of the thesis is many folds. Thus, at first by means of descriptor generalized plant representation, a new practical and/or applicable solution is achieved to the output feedback control problems. Such that, it is derived through an appropriate transformation into control problem with a state-space generalized plant. This new approach yielded a method of finding optimal controllers for descriptor systems that simplifies all the existing methods. Consequently, expressed in terms of the given data matrices are defined the relevant regularity conditions for descriptor generalized plant, and also are derived the necessary and sufficient conditions. Furthermore, designing an H_∞ controller with more robust properties with respect to the existing H_∞ controllers. In addition, from the practical aspect, the quadcopter system has been modeled by using the differential and algebraic equations which is something new. Moreover, a new sufficient Lyapunov-like stability conditions and new sufficient Lyapunov-like stabilizability conditions for nonlinear descriptor systems with control are presented along with their applications to quadcopter's flight stabilization. Most of these results are rather practical because they do not need solving nonlinear differential equations and nonlinear algebraic equations. Thus the usage of these new results requires only differentiation of functions.

Key words: Descriptor system, optimal control, quadcopter stabilization, robust control

Благодарност

Подготовката на оваа докторска дисертација беше долготраен процес сличен на искачување на планина, но и интересен и неповторлив предизвик. Неговото успешно завршување не би било можно без помош, поддршка и разбирање на голем број луѓе на кои сум им многу благодарен.

Би сакал да ја изразам мојата посебна благодарност до мојот главен ментор, проф. Д-р Јован Д. Стефановски, за неговата континуирана мотивација и водство за време на моите студии и докторска дисертација. Не само што ми го покажа патот и помогна да ме поведе на патот кон мојот докторат. туку неговото педагошко размислување, истражувачкиот дух, охрабрувањето, мотивацијата и разбирањето, ме инспирираа да се стекнам со доверба и да истрајам во моето истражување и проучување.

Исто така, би сакал да ја изразам мојата посебна благодарност до проф. Д-р Миле Станковски за неговата постојана помош, поддршка и соработка. Исто така, посебно му благодарам на проф. Д-р Георги М. Димировски за неговата постојана помош преку многу дискусии, сугестии и соработки. Исто така, за покажување и докажувањето на помладите генерации дека истражувачкиот ентузијазам и потенцијалот за работа не се во функција на возраста.

Исто така, би сакал да им се заблагодарам на другите членови на комисијата во тезата, проф. Д-р Ѓани Јуричиќ и проф. Весна Ојлеска Латкоска за споделување на своето време како членови на комисијата.

Понатаму, посебно му се заблагодарувам на проф. Д-р Бен М. Чен и неговиот тим за беспилотни летал и на д-р Свикенг Фанг, за вредните дискусии и значајните практични придонеси за време на мојата двомесечна академска посета (Јули-Септември 2017 г.) на Националниот Универзитет во Сингапур (ECE Department, NUS). Исто така, би сакал да им се заблагодарам на Националниот Универзитет во Сингапур и на Универзитетот во Митровица "Иса Болетини" за нивната финансиска поддршка за оваа академска посета.

Исто така, се заблагодарувам на проф. Д-р Стојче Десковски, проф. Горјан Нацински и други колеги од Институтот за Автоматика и Системско инженерство

на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, за нивната помош, совет и поддршка при моите докторски студии.

Покрај тоа, јас сум многу благодарен на мојата сопруга, Ватра, и патем и на мојот син Акил, кои ме поттикнаа и ме мотивираа на патот кон мојот докторат и студиите и постојано ми даваа безусловна поддршка и бескрајна љубов при моето истражувачко патување и живот.

Последно, но не и најмалку важно, им се заблагодарувам на моите родители за нивните жртви, придонеси и поддршка за моето воспитување, подигање и образование.

Конечно, би сакал да им се заблагодарам на сите оние кои ми помогнаа директно или индиректно во завршувањето на мојата истражувачка работа.

Содржина

Благодарност	5
Содржина	7
Список на слики	10
Список на таблици.....	12
Означувања	13
1. ВОВЕД.....	15
1.1 Вовед	15
1.2 Цели на истражувањето	18
1.3 Работни хипотези	19
1.4 Методологија на истражување.....	20
1.5 Важност на истражувањето	21
1.5.1 Научни придонеси	21
1.5.2 Примена на резултатите од истражувањето	21
1.6 Обем и преглед на тезата	22
2. Преглед на литературата.....	24
2.1 Линеарни дескрипторски системи.....	24
2.1.1 Дефинирање на фундаменталните концепти на Дескрипторска Генерализирана Постројка и управување со повратна врска.....	25
2.2 Нелинеарни дескрипторски системи	29
2.3 Динамичко моделирање и дизајн на управувач на летот	33
3. Линеарни дескрипторски системи.....	35
3.1. Вовед	35
3.2 Преглед на математички прелиминарни резултати	36
3.2.1 Важноста на регуларноста	38
3.3 Нова трансформација на дескрипторската SCS во состојбена SCS.....	42
3.4 Главен резултат за условите за регуларност на дескрипторска GP	46

3.5	Примена на Теорема 3.1 во H_∞ управување на дескрипторса GP	52
3.6	Заклучоци	60
4.	Нелинеарни дескрипторски системи	61
4.1.	Вовед	61
4.2	Главен резултат	65
A.	Стабилност на нелинеарни дескрипторски системи.....	65
B.	Стабилизабилност со повратна спрега на нелинеарните дескрипторски системи.....	73
5.	Моделирање на квадрокоптер и дизајн на контролер на летот	78
5.1.	Вовед	78
5.1.1.	Историја на AV системите	78
5.1.2	Важност на of AV системите	79
5.1.3	Класификација на UAV системите	80
5.1.1.4	Системи за локализација и навигација	82
5.2	Дизајн и развој на квадатор	83
5.2.1	Хардверски дизајн.....	83
5.2.2	Избор на рамка за мултикоптер	84
5.2.3	Параметри на моторите	85
5.2.4	Динамички модел на квадатор	85
5.2.4.1	Кинематика	86
5.2.4.2	6-DOF Динамички модел.....	87
5.2.4.3	Гравитациона компонента	88
5.2.4.4	Роторска компонента.....	89
5.2.4.5	Линеаризиран динамички модел	92
5.2.5.	Параметарска идентификација	94
5.2.5.2	Идентификација на динамиката на моторите и пропелерите	96
5.2.5.3	Експериментални мерења.....	98

5.3	Управување со следење на квадрокоптер	102
5.3.1	Дизајн на надворешната јамка	103
5.3.1.1	Управувањето на височината	103
5.3.1.2	Управување на позиција	104
5.3.2	Дизајн на внатрешната јамка.....	105
5.3.2.1	Управување на положба	105
	<i>А. Дизајн на каскаден PID-PD управувач за следење</i>	<i>105</i>
	<i>В. Дизајн на PID-MPC управување за следење</i>	<i>106</i>
5.5	Заклучок.....	109
6.	Симулациско опкружување	110
6.1	Резултати од симулацијата на управувањето со следење.....	112
6.1.1	VTOL следење на траекторија	112
6.1.2	Следење на хеликална траекторија	114
6.2	Заклучок.....	117
7.	Примена на стабилизацијата со повратна спрега во стабилизација со следење на квадрокоптер	119
7.1	Вовед	119
7.2	Ре-презентација на математичкиот модел на квадрокоптерот како нелинеарен дескрипторски систем.....	119
7.3	Примена во стабилизација на квадрокоптер.....	121
7.4	Алгоритам за нумеричко решавање на дескрипторскиот модел на квадрокоптер .	122
7.5	Симулациони резултати за стабилизација на квадрокоптер	124
7.6	Заклучок.....	127
8.	Заклучок и идна работа	129
8.1	Заклучок.....	129
8.2	Сугестии за идна работа.....	132
	Библиографија	133
	Публикации.....	141

Список на слики

Слика 1. Нелинеарен дескрипторски систем од типот на Лурје	30
Слика 2. Стандардна системска структура за управување со повратна спрега	36
Слика 3 Трансформирана постројка со воведено управување со статичка повратна спрега по излезот	42
Слика 4. Дескрипторска SCS со резултантниот управувач во повратна спрега	45
Слика 5 Временска зависност на $\ z(t)\ $ за K_1 даден во (3.32) со нулти почетни услови	58
Слика 6. Временска зависност $\ z(t)\ $ за матрицата K_1 дадена во (3.31)	59
Слика 7 Временска зависност $\ z(t)\ $ за матрицата K_1 дадена во (3.32)	59
Слика 8. Опитата шема на UAV систем, (Cai, Chen, & Lee, 2011)	80
Слика 9. Соба за тестирање на летање во затворен простор со ViCon	82
Слика 10. Основни компоненти за изградба на летало-квадаторски систем	84
Слика 11. Конфигурација на UAV	85
Слика 12. Релативни координатни системи	87
Слика 13. Квадрокоптер “Плус“ рамка	90
Слика 14. Трифиларно нишало	95
Слика 15. Актуаторски систем	96
Слика 16. Уред за мерење на параметрите на погонот, (Quan, 2017)	97
Слика 17. Брзина на вртење $[\Omega]$ во функција на погонската команда $[\sigma]$	98
Слика 18. Потисок $[T]$ во функција од брзината на вртење $[\Omega]$	100
Слика 19. Вртежен момент (Torque) $[Q]$ во функција на брзината на вртење $[\Omega]$	100
Слика 20. Коефициент на вртежен момент C_t	101
Слика 21. Коефициент на потисок C_q	102
Слика 22. Шема со каскадно управување за следење на квадрокоптер	109
Слика 23. Опита шема на управувач на летање со динамички модел на квадатор	110
Слика 24. Следење на 3D -референтна траекторија со PD и MPC	112
Слика 25. Референтна траекторија во правците x, y, z , со PD и MPC	113
Слика 26. Конвергенција на грешката на аголот на свртување (yaw angle) e_ψ со PD и MPC ..	114

Слика 27. Следење на 3D -референтна траекторија со PD и MPC во присуство на надворешни периодични нарушувања на вртежниот момент.	115
Слика 28. Следење на 3D -референтна траекторија со PD и MPC во присуство на надворешни периодични нарушувања на вртежниот момент (Поглед одозгора во x-y рамнината) .	115
Слика 29. Следење на референтна траекторија во x, y -правците со PD и MPC во присуство на надворешни периодични нарушувања на вртежниот момент.....	116
Слика 30. Следење на референтна траекторија во z-правецот со PD & MPC	116
Слика 31. Референтна траекторија на поместување на аголот на завртување (yaw angle) со PD и MPC.....	117
Слика 32. Линеарно поместување во x-оската.....	124
Слика 33. Линеарно поместување во y-оската.....	125
Слика 34. Линеарно поместување во z-оската	125
Слика 35. Аголно поместување ϕ	126
Слика 36. Аголно поместување θ	126
Слика 37. Аголно поместување ψ	127

Список на таблици

Табела 1. Параметри користени во симулацијата..... 112

Табела 2. Параметри за подесување на магнитудата на управувањето..... 124

Означувања

ϕ, θ, ψ : Ојлерови (Euler) агли

m : Тотална маса на телото

g : Гравитационо забрзување

d : Должина на единечна рака

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} : Момент на инерција (во x, y и z -оските)

Ω_n : n -та брзина на вртење

\hat{C}_T : Константа на вртежниот момент на мотор/пропелер

\hat{C}_Q : Константа на моментот на мотор/пропелер

v_b : Брзина во координати на рамката на телото

v_n : Брзина во Ојлерови координати

R_b^n : Ротациона маса од телото (b) кон земниот (n) координатен систем

R_n^b : Ротациона маса во координатен систем од земјата (n) кон телото (b)

Кратенки

- LMI: *Linear Matrix Inequality* – Линеарно Матрично Неравенство
- SCS: *Standard Control Structure* – Стандардна Управувачка
Структура
- GP: *Generalized Plant* – Генерализирана Постројка
- SOF: *Static output feedback* – Статична Повратна Врска по Излезот
- RM: *Rational matrix* – Рационална Матрица
- FGE: *Finite generalized eigenvalues* – Конечни Генерализирани
Карактеристични Вредности
- DOF: *Degrees of freedom* – Степени на Слобода
- LQ: *Linear Quadratic* – Линеарно Квадратно
- MAXE: *Matrix Entropy* – Матрична Ентропија
- ARE: *Algebraic Riccati Equation* – Алгебарска Рикатијева Равенка
- NWU: *North West Up* – Север Запад Горе
- NWD: *North West Down* – Север Запад Долу
- UAV: *Unmanned Aerial Vehicles* - Воздушно Летало без Човечко
Опслужување
- UGV: *Unmanned Ground Vehicles* – Земно Возило без Човечко
Опслужување
- UUV: *Unmanned Underwater Vehicles* – Подводно Возило без Човечко
Опслужување
- AV: *Aerial Vehicle* – Воздушно Возило
- RC: *Radio Control* – Радио Управување
- VTOL: *Vertical Takeoff and Land* – Вертикално полетување и слетување

ГЛАВА 1

ВОВЕД

1.1 Вовед

Концептите на линеарни системи, оптимално управување, динамичко програмирање, делумно обсервирани системи, идентификација на системи, адаптивно управување, нелинеарна естимација, робустно управување, нелинеарни системи, системи со дистрибуирани параметри, децентрализирани системи, дискретно-настански системи, и т.н., се сите истражувани и испитувани во време кога технологијата за нивна примена не била достапна (Astrom & Kumar, 2014). Развојот на теоријата на управување била исто така под големо влијание на напредокот во развојот на компјутерите.

Денес, напредокот во технологијата на вградените системи и специјално развојот на вештачката интелигенција поттикна воени потреби и интерес за истражување на проширување на конвенцијалните превозни средства кон конвенцијални и неконвенцијални превозни средства без посада, како UGV (Unmanned Ground Vehicles – Земни Возила без Посада), UAV (Воздушни Возила без Посада), UUV (Unmanned Underwater Vehicles – Подводни Возила без Посада), да се види ((Bi, et al., 2017), (Phang, Lai, Wang, Lan, & Chen, 2014), (Phang, Li, Yu, Chen, & Lee, 2014), (Zhang, Xian, Zhao, & Zhang, 2015), (Bunjaku, Stefanovski, & Stankovski, 2017), (Wang, Ke, & Chen, 2016)).

Како што (Astrom & Kumar, 2014) хронолошки го објаснува развојот на технологијата на управувачкиот систем, забележително е дека во 1960-тите имаше враќање кон диференцијални равенки, бидејќи фреквентниот одзив не беше добро прилагоден за нумеричките пресметки, и беше непогоден за системи со многу влезови и многу излези. Враќањето кон диференцијални равенки стана познато како "пристап со состојбен простор", бидејќи идејата за состојба на Њутон (Newton) одигра централна улога. Тој

пристап беше исто така наречен "модерна теорија на управување", за да се разликува од теоријата на сервомеханизмите. Многу пати теоријата на линеарните системи е прогласена за заситена од истражувачка перспектива, меѓутоа, заради воведувањето на нови теории и придонеси, во меѓувреме, фокусот на истражувањето за ова поле е обновен.

Повратната врска по состојбата вообичаено е првиот избор во дизајнот на системот на управување, кога се користи теоријата на состојбен простор, бидејќи сите информации за минатото се содржани во состојбената променлива. Меѓутоа, во трудот (Bunjaku, Stefanovski, & Dimirovski, 2018) се покажува дека класата на дескрипторски системи е понапредна во опишувањето на природата на физичкиот систем од системите дефинирани во состојбен простор. Други предности за користење на модели на дескрипторски системи се дадени во [Muller 2000]. Но сепак, не постои ефикасен начин директно да се реши управувачкиот проблем на системите претставени како диференцијални и алгебарски равенки.

Моделирањето игра суштинска улога во развојот и дизајнот на управувањето на различни физички системи. Како последица на тоа, тоа директно влијае преку намалување на трошоците за развој, благодарение на флексибилноста при:

- промени / прилагодувања во моделот,
- разновидноста на мерењата,
- споредба на различни излези без потреба од сензори, итн.

Меѓутоа, додека ги моделираме физичките системи и ги дизајнираме управувачите, вообичаено треба да се задржиме со внимателност на следните основни прашања:

- Ако сите состојбени променливи не се директно мерливи, дали е можно да се реконструираат сите тие, користејќи ги мерењата на излезите?
- Дали е можно со примена на соодветен управувачки сигнал да се доведат сите состојбени променливи од почетната состојба до посакуваната состојба во рамките на одредено времетраење?

За овие прашања, Калман ги дефинирал стандардните поими за обсервабилност и контролабилност.

Што е UAV? Беспилотно летало (UAV или дрон) е летало кое е опремено со потребни единици за обработка на податоци, сензори, системи за автоматско управување и комуникации, и е способно за изведување на автономни мисии на летови без учество на човечки пилот (Cai, Chen, & Ли, 2011). Според (Quan, 2017 година), авионите и пилотите сè уште беа мистериозни додека малите и микро-мултикоптери не се приближија кон потрошувачите, преку пазарот на радио управувани (RC) играчки. Во споредба со копнените возила, способноста и маневрирањето на роторкрафтите ги прават истите идеално решение за мисии за истражување, мапирање и следење. Специјално, роторкрафтите се користат за да се испорачаат товари во комплексни тридимензионални (3D) средини.

Врз основа на разни апликации и мисии, системите на UAV, според (Cai, Chen, & Lee, 2011) се класифицирани во четири главни категории: со фиксни крила, со задвижувани крила, роторкрафти, и хибридни системи.

Дизајнот на стратегиите за управување на квадкоптерите е атрактивно поле за многу истражувачи, и досега се предложени многу управувачки алгоритми.

Во зависност од апликацијата, UAV системите се поделени во две главни категории: за внатрешни и за надворешни примени. Врз основа на категориите споменати во (Cai, Chen, & Lee, 2011), внатрешната примена на UAV системите е позната како примена во околина без GPS. Постојат многу истражувања за навигација во таква средина ((Phang, Lai, Wang, Lan, & Chen, 2014), (Zhang, Xian, Zhao, & Zhang, 2015)). Повеќето истражувачки трудови се базираат на обединување на сензори (fusing sensors) како Камера, Lidar (Ласерски радар), Ласерски покажувач итн. Денес, за точна локализација во затворен простор се користат Оптико-следачи (Opto-tracker) и Систем за фаќање на движењето (Motion capture system) (ViCon). Вториот систем има точност до 0,1 мм.

Процесот на дизајнирање и развој на AV -систем бара извесни фази од идејата кон крајниот концепт за тестирање. Ако системот е потребен да исполни некои критични мисии, на пример примена во опасна средина, тогаш точноста, веродостојноста и издржливоста во текот на летот се витални точки кои треба да се земат предвид со внимателност. Дизајнот на стратегијата за управување на квадкоптерите е суштински процес во развивањето и изградбата на системи на беспилотни летала - квадкоптери. Заедно со динамичкото моделирање, прецизноста на сензорот има значително влијание врз перформансите на квадкоптерот во достигнувањето на посакуваната точка во просторот, следејќи ја референтната траекторија, за извршување на саканата мисија.

Целта на дизајнот на управувачкиот систем, без оглед на внатрешните и надворешните несигурности и нарушувања, е да ја стабилизира состојбата на системот околу саканата референтна состојба. Потребно е користење на повратни спреги и споредување на мерливи или проценети состојби на процесот на динамичкиот модел, со посакуваните или референтните состојби. Системот квадрокоптер содржи 6 степени на слобода (6-DOF) $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ и само четири управувачки влезови (u_1, u_2, u_3, u_4) . Затоа, тоа е систем со недоволно управување (under-actuated) и нестабилен динамички систем. Бидејќи е невозможно да се управуваат 6 степени на слобода истовремено, не е возможно системот да се управува со само една јамка.

Квадрокоптерот не е способен да се движи во рамките на $(x-y)$ рамнина и да остане во состојба на лебдење, односно x и y движењата се вршат со вртење на рамката на телото со агол на наклон θ и агол на тркалање ϕ , респективно. Со други зборови, транслационите движења кај квадрокоптерот се вршат со ротациони движења, а не обратно.

Во оваа теза, предметот на истражувањето е фокусиран на изнаоѓање на нов пристап за моделирање на UAV-квадрокоптер како диференцијален и алгебарски систем, потоа развивање на нелинеарно хибридно управување за таков систем, кој ги задоволува некои барања за достигнување на саканата точка во просторот со минимум прескок (overshoot). За целите на имплементација и тестирање на нелинеарно хибридно управување, кое сакаме да го развиеме, треба исто така да се развие симулациски модел базиран во Matlab.

1.2 Цели на истражувањето

Со длабоко истражување на прашањата на ефикасен начин за директно решавање на равенката на дескрипторскиот систем, намената на тезата беше да се развие практична методолошка постапка (алгоритам) која може да ги реши управувачките проблеми со дескрипторската генерализирана постројка (GP).

Целите на дисертацијата беа фокусирани на:

- развивање на метод кој го трансформира управувачкиот проблем со стандардна дескрипторска структура во управувачки проблем со стандардна структура дефинирана во состојбен простор,
- елиминирање на дескрипторската природа преку обезбедување на однесување без импулси на системот кога се најде стабилизирачко управување,
- покрај модел зададен со диференцијални равенки, при развивањето на математички модел на квадрокоптерот, исто така се вклучуваат на алгебарски ограничувања, односно се претставува квадрокоптерот како нелинеарен дескрипторски систем,
- развивање на хибриден метод за управување; нелинеарно управување врз основа на методот на стабилност од типот на Љапунов прилагоден за нелинеарни дескрипторски системи, со што се обезбедува стабилизирање и следење на квадрокоптерот.

1.3 Работни хипотези

За истражувањето кое беше спроведено во оваа дисертација, овде е презентирана главната хипотеза:

- X1. Примената на новиот алгоритам за управување на дескрипторска структура ќе резултира со побрз и полесен начин за добивање на оптимален управувач за диференцијални и алгебарски системи, во споредба со постоечките методи.
- X2. Квадрокоптерот може да се моделира како нелинеарен дескрипторски систем
- X3. Хибридниот управувачки метод базиран на функцијата на стабилност слична на функцијата на Љапунов ќе ја подобри стабилизацијата и следењето на квадрокоптерот.

Помошна хипотеза

X0. Бидејќи квадрокоптерот е конзервативен систем, стабилизацијата и следењето на квадрокоптерот нема да се подобри со примена на хибридно управување.

1.4 Методологија на истражување

Методологијата на истражувачката работа се состои од математичка анализа, поставување хипотези, развој на алгоритми, изградба на компјутерски симулациски модел за тестирање на алгоритми и верификација на хипотезата. Истражувањето е спроведено во неколку фази.

- Во првата фаза беше разгледана детална анализа на моменталната состојба во областа на дескрипторските системи, во однос на нивната стабилност, импулсивно однесување и можноста за примена во реалните системи.
- Втората фаза се фокусираше на развој на алгоритам за решавање на управувачкиот проблем со дескрипторските системи. Тука во прв план се разгледа можноста за трансформација на управувачкиот проблем зададен со дескрипторскиот систем во управувачки проблем зададен во состојбен простор, со што се обезбедува елиминација на импулсивно однесување на дескрипторскиот систем. Следствено, со користење на добро познат метод за управување, изнајден е оптимален управувач за системот дефиниран во состојбен простор. Откако ќе се добие оптималниот управувач за системот во состојбен простор, со мали дополнителни напори може да се врати проблемот во форма на дескрипторски систем и да се најде оптимален управувач за него. Преку нумеричка анализа и компјутерска симулација во Matlab, го тестиравме алгоритмот развиен во оваа фаза, кој ја потврди главната хипотеза X1.
- Во третата фаза се развиени нелинеарни управувачки методи базирани на функцијата на стабилност на нелинеарните дескрипторски системи, како што е функцијата на Љапунов,
- Во четвртата фаза се изведе математички модел на квадкоптер со помош на диференцијална и алгебарска векторска равенка.
- Во петтата фаза е дизајниран каскаден управувач за летање на квадкоптер. Потоа беше изграден компјутерски симулациски модел во MATLAB Simulink, така што аналитичките придонеси од третата и четвртата фаза се инкорпорирани во општ модел за тестирање и верификација на хипотезите X2 и X3.
- Во последната фаза, врз основа на резултатите од петтата фаза, направивме дополнителни модификации и подобрувања на алгоритмите, а исто така дадовме конечни заклучоци и насоки за понатамошни подобрувања и имплементации во иднина.

1.5 Важност на истражувањето

1.5.1 Научни придонеси

Разгледано воопштено, тезата содржи многу научни придонеси, како што се:

- Првиот придонес произлезе од втората фаза на Методологијата за истражување. Алгоритмот за добивање на оптимален управувач за диференцијални и алгебарски системи, во споредба со постојните методи, добивме дека е побрз и многу полесен.
- Вториот придонес е изработката на нов пристап за претставување на квадрокоптер како нелинеарен дескрипторски систем,
- Третиот придонес е дизајнот на нелинеарно стабилизирачко управување базирано на функцијата на стабилност од типот на Љапунов, прилагодена за нелинеарен дескрипторски систем.
- Четвртиот придонес е тоа што со воведување на мешани хибридни стабилизирачки управувања (управување на следење + управување на стабилизацијата добиени од условите на стабилност на Љаунов) се подобри стабилизацијата на квадрокоптерот.
- Друг придонес на овој нелинеарен управувачки метод е тој што не бара решавање на нелинеарни диференцијални равенки и нелинеарни алгебарски равенки, туку само диференцијација на функции.

1.5.2 Примена на резултатите од истражувањето

- Алгоритмот за решавање на управувачките проблеми со дескрипторските системи може да се користи во иднина како алатка за добивање на оптимален управувач на линеарен дескрипторски систем.
- Резултатите од симулацискиот модел имаат позитивно влијание кон стабилизацијата и следењето на квадрокоптерот. Исто така, со моделот се потврдува дека теоретскиот импакт на резултатите не е ограничен само на квадрокоптер, туку може да поттикне истражување и евентуално проширување на друга апликација во иднина.

1.6 Обем и преглед на тезата

Втората глава од тезата започнува со општ вовед од линеарни дескрипторски системи, нелинеарни дескрипторски системи и со краток вовед за квадкоптерите. Потоа следи преглед на литературата за тековната истражувачка ситуација во полето на линеарни и нелинеарни дескрипторски системи, како и во полето на дизајнирање на управувањето на летот и динамичкото моделирање на квадкоптерите.

Глава 3: Се започнува со воведувањето и елаборацијата на една нова трансформација на управувачкиот проблем со генерализирана структура на дескриптори систем во генерализирана структура во состојбен простор, потоа дефинирање на условите за регуларност за дескрипторка генерализирана постројка (GP) и елаборирање за нивното значење. Понатаму, следи формулација и доказ на Теорема 3.1 за управување на дескрипторска GP.

Глава 4: Започнува со елаборација на теоретскиот придонес за стабилноста на нелинеарните дескрипторски системи, подоцна со развојот на алгоритмот за наоѓање на повратна спрега за стабилизирање со помош на нелинеарното хибридно управување, врз основа на теоријата на стабилност на Љапунов.

Глава 5: Го елаборира развојот на физичкиот систем на квадкоптерот, а потоа и мерењата на реалните параметри од физичките подсистеми, со цел да добие колку што е можно поточен динамички модел. Потоа, се опишува процесот на добивање на нелинеарен модел на квадкоптер од динамиката на круто тело. Понатаму, се линеаризира моделот и се дизајнира каскадното линеарно управување за следење, врз основа на PID-PD и PID-MPC.

Глава 6: Се презентира развојот на симулационата средина врз основа на MATLAB Simulink, и се воведуваат блокови и интерконекции во нив. Последниот дел од оваа глава елаборира споредба на два каскадни управувачи за следење на две различни референтни траектории, односно VTOL и Хеликална.

Глава 7: Се елаборира претставувањето на динамичкиот модел на квадкоптер како нелинеарен дескрипторски систем, кој е нешто ново во однос на постоечката литература. Потоа, со примена на теоретските придонеси од Глава 4 на стабилизацијата на квадкоптер, се дизајнира нелинеарно хибридно управување. Потоа, следниот дел го елаборира алгоритмот за нумеричко решавање на квадкоптерскиот дескрипторски модел. Оваа глава завршува со презентирање на резултатите од симулациите за

извршување на стабилизацијата на квадрокоптерот за задачата на достигнување на посакувана точка во просторот.

Глава 8: Содржи заклучоци и препораки за идните истражувања како последица на истражувачката работа на оваа теза.

Глава 2

Преглед на литературата

2.1 Линеарни дескрипторски системи

Дескрипторските линеарни системи се поадекватни и поробустни од конвенционалните линеарни системи за дефинирање во состојбен простор во обезбедувањето на поприроден опис на динамичките постројки што треба да се управуваат, како што е опишано во литературата (Benner, Byers, Losse, Mehrmann, & Xu, 2011), (Dai, Zhao, & Dimirovski, 2009), (Luenberger, 1977), (Dong & Xiao, 2015), (Feng & Yagoubi, 2017), (Marir, Chadli, & Bouagada, 2017). Посебна предност на примената на модели на дескрипторски системи е нивниот капацитет да дадат реални управувачки решенија за постројките со временски променливи параметри и несигурности кои се среќаваат во воздухопловството (Dai, Zhao, & Dimirovski, 2009), (Wang, Dimirovski, & Yue, 2016), како и во различни индустриски области. Друга предност на користење на модели на дескрипторски систем е нивниот потенцијал да дадат дисипативност на системот со повратна спрега (Masubuchi, 2007). Од познатите апликации во реални постројки коишто се среќаваат низ цветот, дескрипторските системи наоѓаат примена во управувачките проблеми за: авиони, постројки за хемиски процеси, системи и кола од големи размери, роботиката во машинството, енергетските системи, па дури и економските системи (на пример, види (Dai, Zhao, & Dimirovski, 2009), (Feng, Yagoubi, & Chevrel, 2011), (Feng & Yagoubi, 2017)).

Управувачките проблеми кај постројките кои се опишани со модели на дескрипторски (или со друго име, сингуларни) линеарни системи, беа жешка истражувачка област во минатото. Тоа е сеуште отворена и интересна тема за

истражување, заради проблемите на ефикасно решавање на диференцијални равенки со алгебарско ограничување.

Дескрипторските системи, покрај предностите во споредба со системите во состојбен простор, поврзани за степенот на обезбедување на поприроден опис на реалните системи, се карактеризираат како покомлексни и потешки за да се решат (види Luenberger, 1977), (Duan, 2010), (Feng & Yagoubi, 2017). Во референца (Xu & Lam, 2006) авторите јасно истакнуваат дека во решавањето на системи во простор на состојби се бара само справување со стабилноста, а од друга страна, за да се решат дескрипторските системи, покрај стабилноста, треба да се обрне внимание на уште два аспекти, регуларноста (или сингуларност) и импулсивниот режим, бидејќи специфична карактеристика на дескрипторските системи е дека одзивите може да содржат импулсивно однесување. Овие однесувања се неприфатливи и дури не се очекува да постојат во практични реални системи, поради неизбежните деградирачки последици. Имено, силното импулсивно однесување може значително да ги деградира перформансите на системот, да предизвика заситување на состојбата и на одзивите на излезот, па дури и да го уништи системот. Затоа елиминирањето на импулсивното однесување на дескрипторските системи е од суштинско значење во дизајнот на системот за управување. Импулсивните начини на однесување (или импулсивните модови) на дескрипторскиот систем можат да се елиминираат преку одредени стратегии за управување со повратна спрега; види ја страницата 26 од монографијата (Duan, 2010).

2.1.1 Дефинирање на фундаменталните концепти на Дескрипторска Генерализирана Постројка и управување со повратна врска

Зададена генерализирана постројка на дескрипторски систем ја има следната ре-презентациона форма:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

каде: x е вектор на дескрипторската состојба, со димензија n , u е управувачки вектор, z е вектор на управуван излез, y е вектор на измерен излез, за директно управување по

излез. Векторот w вклучува нарушувања, потенцијални несигурности на моделот, но исто така и сигнали на дефекти (faults). Матриците $E, A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$ и D_{22} се некои реални матрици (со реални коефициенти), со димензии специфицирани во следната стандардна ознака (Duan, 2010), (Feng & Yagoubi, 2017):

$$G := \begin{bmatrix} A - sE & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} r & p \\ G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} m \\ \} q \end{matrix}$$

Со примена на управувач на оваа постројка се добива стандардната управувачка структура (standard control structure) (SCS). Познато е од книгата на (Zhou, Doyle, & Glover, 1996) (види страна 9) дека оваа SCS ги опфаќа скоро сите системски структури елаборирани за управувачки проблеми. Заради оваа причина, ние постројката дефинирана во (2.1) ќе ја викаме генерализирана постројка (generalized plant) (GP).

Намерата на многу истражувачки работи е да се најде управувач, опишан со неговата матрична функција на пренос (transfer function matrix) $K(s)$, така што системот со повратна спрега е стабилен по конечната динамика (finite dynamics stable), без импулси, и задоволува некои критериуми за своите перформанси, изразени со матричната функција на пренос на системот со повратна врска, која тука ја означуваме со $H(s)$, и е дадена со $H := G_{11} + G_{12} K(I_q - G_{22} K)^{-1} G_{21}$.

Да забележиме дека некои од најчестите критериуми за перформансите се:

- a) $\|H\|_{\infty} \leq \gamma$, за некое $\gamma > 0$,
- b) $\|H\|_{\infty} \leq \gamma$ и степенот на управувачот е редуциран ($e < n$),
- c) $\|H\|_{\infty}$ е минимално,
- d) $\|H\|_2$ е минимално.

Треба да се забележи дека многу трудови во литературата елаборираат на претходно формулираните управувачки проблеми за линеарни системи со критериумите (a), (b), (c) и (d). Тука ќе се фокусираме на управувачкиот проблем зададен со GP, но и други проблеми со SCS на дескрипторски системи.

Во трудовите (Tabaka & Katayama, 1998) и (Takaba, Morihira, & Katayama, 1994), употребена е генерализирана алгебарска Рикатијева равенка (generalized algebraic Riccati equations) (GARE) за да се решат проблемите со критериумите (a) и (d), респективно, при претпоставка на полн ранг по колони на матрицата D_{12} и полн ранг по редици на матрицата D_{21} .

Во трудот (Masubuchi, 2007), предложен е пристап за решавање на управувачки проблеми со критериумот (a), заснован врз една форма на Калман-Јакубович-Попов лемата (Kalman-Yakubovich-Popov lemma) за дескрипторски систем (да се види Лема 1 во (Masubuchi, 2007)).

Во трудот (Inoue, Wada, Ikeda, & Uezato, 2015), пристапот со линеарни матрични неравенства (linear matrix inequalities) (LMI) (Boyd, El Ghaoui, Feron, & Balakrishnan, 1994), (Gahinet & Apkarian, 1994), (Gahinet P., 1992), базиран на прочуените работи на Јакубович (Yakubovich, 1962), (Yakubovich, 1971), (Yakubovich, 1984) со главните фундаментални резултати, е применет за да се реши проблемот со критериумот (a) преку поставување на ограничувања со стриктни линеарни неравенства.

Во трудот (Xin, Hara, & Kaneda, 2008), со употреба на модифициран пристап со LMI, решен е успешно управувачкиот проблем зададен со критериумот (b).

Сепак треба да се забележи дека не е лесно да се пресметаат управувачките влезови врз база на мерените излези за дескрипторските системи, бидејќи досега во литературата не е пронајден ефикасен начин за решавање на равенки од дескрипторски тип. Затоа што, сериозен математички проблем е решавањето на диференцијални равенки со алгебарски ограничувања (на пример, да се види воведот во (Inoue, Wada, Ikeda, & Uezato, 2015)).

Условите за контролабилност и обсервабилност се анализирани во трудот (Losse & Mehrgmann, 2008), за дескрипторски системи од втор ред, и таму е покажано исто така како класичните услови од прв ред можат да се генерализираат на системи од втор ред. Понатаму, елаборирано е дека со изведување на конвенционална трансформација во систем од прв ред, може да се нарушат некои својства на контролабилност и обсервабилност. Преку нумерички пример е демонстрирано дека се губи својството на импулсна контролабилност кај ограничените мултиваријабилни системи, како резултат на ре-презентацијата како систем од прв ред. За да се надмине овој проблем, изведена е канонична форма на дескрипторскиот систем и добиена е нова формулација на системот од прв ред. На таков начин не се нарушуваат својствата на контролабилност и обсервабилност.

Истражувачката работа на (Dong & Xiao, 2015) се фокусира на решавање на H_∞ проблеми за управување со повратна спрега по состојбата, со користење на пристапот на делта оператор. За сингуларниот систем на делта оператор, којшто е допуштен за посакуваниот H_∞ перформансен критериум, се даваат неопходни и доволни услови. Сите добиени услови во тој труд се во форма на строги линеарни матрични нееднакости, чии изводливи решенија може да се најдат со стандарден метод на линеарно програмирање. Дадени се нумерички примери за да се илустрира ефективноста на добиените теоретски резултати.

За дизајнирање на H_∞ управувачи зададени во состојбен простор за линеарни временски-инваријантни дескрипторски системи, употребена е методата со линеарна матрична нееднаквост (LMI), во трудот (Inoue, Wada, Ikeda, & Uezato, 2015). Предложената метода врши аналитичка трансформацијата во параметарски домен, преку добивање на неопходна и доволна линеарна матрична нееднаквост за постоење на управувач во состојбен простор. Управувачот го има истиот динамички ред на реализација како и дескрипторскиот систем, којшто треба да се управува, а системот со повратна спрега е регуларен, стабилен и без импулси. Недостаток на овој метод е тоа што реализацијата на добиениот контролер не е минимална.

Трудот на (Benner, Byers, Mehrmann, & Xu, 2007) и подоцна следниот (Benner, Byers, Losse, Mehrmann, & Xu, 2011) дизајнираат робустни оптимални H_∞ управувачи базирани на γ -итерација, коишто можат да се имплементираат на нумерички робустен начин, начин кој е независен од решението на алгебарска Рикатијева равенка и од следователната проблематична инверзија на матрици и матрични множења. Имено, класичните формули во околина на оптималното γ можат да бидат неприменливи заради инверзија на сингуларни матрици или матрици со лоши услови за инверзија (ill-conditioned matrices). Исто така, во воведот од трудот (Gahinet P., 1992) кажано е дека: "Кога се приближуваме до оптималното H_∞ слабеење γ_{opt} , се појавуваат својства на блиску-до-сингуларност во овие формули, коишто предизвикуваат чувствителност на пресметките".

Од денешна гледна точка на H_∞ управувањето, во околина на оптималното решение, три видови на проблеми можат да се појават:

- (i) Големи коефициенти во решението за управувачот, коишто не можат физички да се реализираат,

- (ii) “Брзи одзиви“ (“Fast modes”) во системот со повратна врска затворен со H_∞ управувачот,
- iii) Неробустност на стабилноста во однос на мали варијации на коефициентите на управувачот и/или постројката.

2.2 Нелинеарни дескрипторски системи

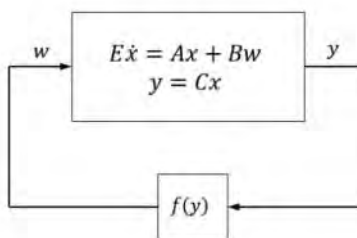
Во зависност од областа на примена, дескрипторските системи се нарекуваат со најразлични имиња: диференцијално-алгебарски равенки (differential algebraic equations) (DAEs), модели на однесување (behavioral models), сингуларни системи, полусостојбени равенки (semi-state equations), имплицитни модели, или диференцијални равенки на многуобразија (manifolds). (Campbell, Nikoukhah, & Delebecque, 1999).

Со примена на класичните алатки на теоријата на управување, во трудот (Franco, Scarcioiti, & Astolfi, 2017), се анализира проблемот на стабилност за нелинеарни диференцијално-алгебарски системи. За да се утврдат својства на стабилност за оваа класа на системи, директната метода на Љапунов се употребува и се обезбедуваат линеарни матрични неравенства LMI. Потоа, диференцијално-алгебарскиот систем се интерпретира како интерконекција преку повратна спрега на еден динамички систем и еден алгебарски систем, со употреба на теоремата на мало засилување (small gain theorem), и се изведува еден доволен услов за стабилност.

Љапуновата стабилност и пасивноста се суштествени составни делови во изведувањето на управувачките закони, и истите се клучни и за нелинеарните дескрипторски системи (Astrom & Kumar, 2014).

Проблемот на робустно H_∞ управување е анализиран во трудот (Dai, Zhao, & Dimirovski, 2009) за континуални линеарни системи со несигурности кои варираат во времето, со употреба на параметарско - зависни Љапунови функции. За да се спроведе анализа на робустноста на перформансите во синтезата на H_∞ управување за класата на афини параметарски системи, се применува пристапот со дескрипторски систем. Се изведува критериумот за H_∞ перформанси со помош на LMI, употребувајќи трансформација на дескрипторски модел на линеарен систем со политопски несигурности (polytopic systems).

Понатаму, за време не претходните пар децении се појавија во литературата значително нови развои за управување на различни хибридни динамички системи (Brogliato, Lozano, Maschke, & Egeland, 2007), (Franco, Scarciotti, & Astolfi, 2017). Некои сегменти на овие развои се наречени диференцијално-алгебарски системи, додека други, хибридни системи, чија една подкласа се превклучувачките управувачки закони коишто се однесуваат на алгебарскиот дел, додека друга подкласа се нарекува дескрипторски системи, коишто ќе бидат едни од најобработуваните во оваа теза. Сепак, станува збор за еквивалентен случај на нелинеарни динамички континуирани системи за линеарни дескрипторски системи. Последниве можат да се посматраат како системи првично креирани во трудот на Лурје (Lurje, 1951). Имено нелинеарните системи на Лурје имале архитектура на повратна спрега со една статичка нелинеарност од секторски тип, и линеарен динамички дел, којшто е класичен, што може да се концептуализира како дескрипторски систем прикажан на Слика 1.



Слика 1. Нелинеарен дескрипторски систем од типот на Лурје

Тука разгледуваните нелинеарни дескрипторски системи лесно може да се посматраат како генерализација на системот на Лурје, со претпоставка дека линеарниот дел е опишан со дескрипторска променлива, и една излезна равенка, како што е прикажано на Слика 1. Очигледно, оваа слика ја нагласува основната управувачка физика на нелинеарните дескрипторски системи. Системите со повратна спрега коишто имаат таква архитектура станаа познати под името системи од типот на Лурје (истите исто така се наречени нелинеарни управувачки системи со одвоена нелинеарна функција), додека нивната стабилност како проблем се нарекува стабилност на Лурје. На крајот на краиштата, Ласал и Лефшец, во трудот (La Salle & Lefschetz, 1961) докажале дека функцијата на Лурје која е кандидат за функција на Љапунов е навистина соодветна функција на Љапунов за оваа класа на нелинеарни системи (Lurje, 1951).

Дури на почетокот на третиот милениум, се појави основен фундаментален резултат на стабилноста на мултиваријабилни системи на Лурје, во трудот (Watada, Ikeda, Ohta, & Siljak, 2000).

До денес, најдлабока студија на поклопата од нелинеарни дескрипторски системи на Лурје е направена од страна на М. Икеда, да се види ((Watada & Ikeda, 2004), (Watada, Ikeda, & Uezato, 2006), (Watada, Ikeda, & Uezato, 2008)) и референците таму. Во 2004, тие изведуваат критериуми за апсолутна стабилност на Лурјевите системи со асиметрични нелинеарности (Watada & Ikeda, 2004), и во 2006, тие публикуваат теорија за стабилност на дескрипторски системи со не-мазни нелинеарности (non-smooth nonlinearities) (Watada, Ikeda, & Uezato, 2006). Потоа, во 2008, тие го решаваат проблемот за апсолутна стабилност за мултиваријабилни дескрипторски системи од типот на Лурје, во трудот (Watada, Ikeda, & Uezato, 2008).

Како заклучок, денес сметаме дека концептот на нелинеарни дескрипторски системи не е добро воспоставен до задоволително ниво. Следниве комбинирани диференцијални и алгебарски равенки ги дефинираат нелинеарните дескрипторски системи кои се од од интерес за оваа студија. Во продолжение, системот на диференцијални и алгебарски равенки (дескрипторски систем) ја има следнава форма:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f(x_1(t), x_2(t)), \\ 0 &= h(x_1(t), x_2(t)),\end{aligned}$$

каде x_1, x_2 се дефинирани како $x_1 = x_1(t) \in \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 = x_2(t) \in \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$; x_{10}, x_{20} , - се почетни услови за дескрипторскиот систем. Се претпоставува дека функциите $f(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ ги имаат сите парцијални изводи во \mathbb{N} .

Холономните ограничувања во мехатроничките системи се моделираат со алгебарски ограничувања (да се види (Muller, 2005)).

Во обид да го моделираме квадрокоптерот како нелинеарен дескрипторски систем, имаме намера да разгледуваме некоја позитивно семи-дефинитна функција слична на функција на Љапунов, наместо позитивно дефинитна, заради тоа што движењето на квадрокоптерот во хоризонтален правец, во општ случај, захтева да најмалку една од координатите не се стреми кон нула кога $t \rightarrow \infty$. Конкретно, ако со $x(t)$ ја означиме позицијата на квадрокоптерот во правецот на движење, захтеваме $x(t)$ да биде рампа сигнал (ramp signal) (и тогаш соодветната брзина е ненулта), наместо $x(t) \rightarrow \infty$ кога $t \rightarrow \infty$. Додатно, движењето е возможно само ако $\theta \neq 0$, или $\phi \neq 0$, каде θ и ϕ се агли на положбата на квадрокоптерот (attitude angles). Следствено, координатата x , како и другите координати на положбата, не е дозволено да фигурираат во функцијата слична на функција на Љапунов.

Разгледувањето на модел на дескрипторски систем за квадрокоптерот е заради тоа што не постои аналитичка инверзија на алгебарската зависност. Во овој електроенергетски ориентиран труд, вистинскиот придонес ќе биде т.н. координирано управување на пасивација на нелинеарни системи, кои првпат ги воведоа (Larsen, Janković, & Kokotović, 2003) и (Khalil, 2002), (Brogliato, Lozano, Maschke, & Egeland, 2007), (Sun, Zhao, & Dimirovski, 2009).

Следните трудови (Zhao & Hill, 2008), (Liu, Stojanovski, Stankovski, Dimirovski, & Zhao, 2011), (Ma & Dimirovski, 2016) ги проширија идеите за дисипативност и пасивност кон управувачки дизајни за динамички системи со превклучувачко управување. Важно е да се спомене дека (Willems, 1972a), (Willems, 1972b) и подоцна (Hill & Moylan, 1980) го означуваат почетокот на студиите во дисипативни и пасивни динамички системи (линеарни, особено), како и пасивно ориентиран развој на робустно управување.

Квадрокоптерите се познати по нивниот мошне нелинеарен динамички модел. Практична и често применувана процедура за конструкција на управување е линеаризација на нелинеарниот квадрокоптерски динамички модел околу режимот на лебдење, бидејќи поради симетричната рамка, линеарниот динамички модел е доста поедноставен и полесно е да се дизајнираат линеарни управувачи (види Aarar & Aouf, 2014) (Wang, Man, Cao, Zheng, & Zhao, 2016), [Deskovski, Sazdovski, & Gocovski, 2016], (Quan, 2017). Недостаток на таков линеарен модел е потребата да се работи во близина на точката на линеаризација (режимот на лебдење). Откако квадрокоптерот ќе излезе од овој регион, применетите линеарни управувања на системот со повратна спрега може да станат неконтролабилни, и многу е можно квадрокоптер да се сруши.

Честопати квадрокоптерите се нарекуваат физички системи со недоволно управување (under-actuated physical systems), каде што транслационите движења во x - y рамнината се изведуваат преку ротациони движења. Имено, шесте степени на слобода (6 DoF) не може да се управуваат со една повратна спрега. Оттука, потребно е каскадно управување. Со цел квадрокоптерот да не влезе во горенаведениот режим на летање, којшто најверојатно ќе предизвика негово срушување, постојат многу пристапи за управување направени со вклучување на каскадното управување каде што внатрешната јамка е дизајнирана да биде најмалку 5 пати побрза од надворешната јамка (види (Wang, Man, Cao, Zheng, & Zhao, 2016), (Deskovski, Sazdovski, & Gocovski, 2016), (Quan, 2017), (Phang, Lai, Wang, Lan, & Chen, 2015)).

2.3 Динамичко моделирање и дизајн на управувач на летот

Во трудот (Astrom & Kumar, 2014) се елаборира на брилијантен начин, со повикување на историјата, дека во 19 век имало многу експерименти со екипаж. Една од причините зошто браќата Рајт успеале е дека ги разбрале односите меѓу динамиката и управувањето. Интересно е да се забележи дека модерните борбени авиони со високи перформанси се дизајнирани да бидат нестабилни; тие се потпираат на систем за управување за стабилизација.

Покрај главниот фокус на истражувањето на управувачкиот проблем со дескрипторскиот систем, нашата намера е исто така да ги елаборираме динамичките модели за моделирање и управување на беспилотни летала (UAV), особено на квадрокоптерот. Така, во (Deskovski, Sazdovski, & Gocovski, 2016), развиен е дизајн на каскаден управувач за квадрокоптер, врз основа на PID регулатори и обезбедено е следење на различни референтни траектории. Во трудот (Junior, De Paula, Leandro, & Bonfim, 2013), авторите идентификувале динамички модел базиран на експериментални мерења и биле во можност да ја управуваат постојката со користење на PID управување. Споредбата на два управувачки дизајни базирани на PID и LQ, поврзани со истата задача за стабилизирање на квадрокоптер од различни почетни ориентации, е дадена во (Bouabdallah, Noth, & Siegwart, 2004). Два целосно линеарни (една јамка - некаскадно управувања) дизајни на управување за квадрокоптер врз основа на LQ и H_∞ се претставени во трудот (Araag & Aouf, 2014). Споредбата на овие управувачки закони се прави со следење на референтната траекторија. Општо земено, се покажа дека целосната линеарна управувачка структура не е многу веродостојна за реалната примена кај квадрокоптер, поради неговата висока чувствителност во присуство на несигурности на параметрите, (види го трудот (Sorensen, 2010), и референци во него). Во трудот (Raffo, Ortega, & Rubio, 2008), дизајнирана е каскадна управувачка структура така што MPC обезбедува следење на референтната траекторија, додека нелинеарниот управувач обезбедува стабилизација на ротационите движења. Споредбата на PID и MPC управувачката структура за еден степен на слобода (DoF) е елаборирана за следење на референтна траекторија во трудот (Ganga & Dharmana, 2017).

Мотивацијата за истражување за стабилизирање на нелинеарните дескрипторски системи, особено за примена на стабилизација на квадрокоптер, произлегува од фактот што многу неодамнешни истражувања за дизајнот на линеарни каскадни управувачи за квадрокоптер се фокусираат на управување на динамичкиот модел на мултикоптер за случајот кога аголот на свртување (yaw angle) е нула, т.е., $\psi = 0$ (да се види (Dief, Kamra,

& Yoshida, 2017), (Deskovski, Sazdovski, & Gocovski, 2016), (Junior, De Paula, Leandro, & Bonfim, 2013), (Araar & Aouf, 2014), (Sorensen, 2010), (Raffo, Ortega, & Rubio, 2008), (Ganga & Dharmana, 2017), (Dief, Kassem, & El Baioumi, 2014a), (Dief, Kassem, & El Baioumi, 2014b)); што значи дека се поедноставува линеаризираниот математички модел на квадротор, додека пак, генерално, се избегнува случајот каде што е $\psi \neq 0$.

Бидејќи пристапот за дескрипторски систем веќе е sukcesивно применет за управување на авион, во трудот (Dai, Zhao, & Dimirovski, 2009) (види Пример 7.2 во тој труд), во оваа теза планираме да го претставуваме моделирањето на квадрокоптер преку нелинеарна диференцијална и алгебарска равенка. Предностите и недостатоците на системите за моделирање со диференцијална и алгебарска равенка се елаборирани на елегантен начин во (Müller, 2000).

Глава 3

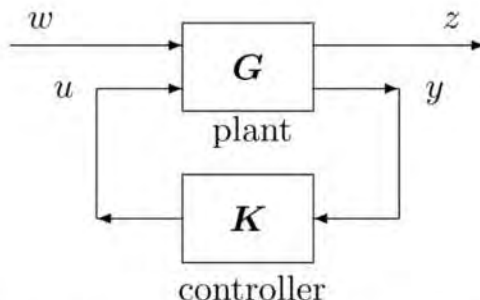
Линеарни дескрипторски системи

3.1. Вовед

Во ова поглавје е разработено ново практично и / или применливо решение за проблемите со управување со повратна спрега по мерени излези, во постројка со зададени управувани и мерени излези, со користење ре-презентација на линеарна генерализирана постојка. Решението за управувач се изведува преку соодветна трансформација во управувачки проблем со генерализирана постројка дефинирана во состојбен простор. Новиот пристап за генерализирани постројки на дескрипторски системи дава поедноставен метод за наоѓање оптимални управувачи. Покрај тоа, ќе се дефинираат релевантни услови за регуларност за генерализирана постројка на дескрипторски систем и ќе се изведе нов алгоритам за трансформација. Како резултат на тоа, ќе се докаже дека оригиналната дескрипторска генерализирана постројка е регуларна, ако и само ако генерализираната постројка дефинирана во состојбен простор преку трансформацијата од нашиот алгоритам е регуларна. Ќе бидат дадени неколку нумерички примери, за да се разјасни новиот резултат на ова поглавје.

За да ја презентираме идејата на проблемот од интерес, нека претпоставиме дека е зададена дескрипторска генерализирана постројка G , дефинирана во (2.1). Потоа ќе ги фокусираме нашите напори во наоѓање на управувач, како што е претставено на следната Слика 1, којшто е опишан со неговата матрична преносна функција $K(s)$, таква

што системот затворен со повратна спrega е стабилен по конечните модови (finite mode stable) и без импулси.



Слика 2. Стандардна системска структура за управување со повратна спrega

Пред да продолжиме со елаборацијата во оваа глава, ќе презентираме забелешки за означувањето:

Векторите и скаларите се означувани со мали букви, додека матриците се означувани со големи букви. Сите функции од s се рационални и со реални коефициенти, и ќе се бележат со затемнети букви и без аргумент, ако тоа означување не е повеќезначно. Половите и нулите (вклучувајќи ги половите и нулите во бесконечност) на некоја рационална матрица се дефинираат преку нивната форма на МекМилан (McMillan form). Ако некоја RM е без полови во $\Re[s] \geq 0$ (во комплексната рамнина \mathbb{C}), тогаш велиме дека таа е стабилна. Зададена RM H е својствена ако таа нема полови во бесконечност. Ако $H(s)$ е својствена RM без полови на имагинарната оска, со $\|H\|_{\infty}$ ја означуваме нејзината \mathcal{L}_{∞} норма, и ако $H(s)$ е стриктно својствена RM, со $\|H\|_2$ ја означуваме нејзината \mathcal{H}_2 норма.

3.2 Преглед ма математички прелиминарни резултати

Во ова поглавје се презентира преглед на математички прелиминарни резултати и се адресираат и цитираат претходни трудови, релевантни за нашите придонеси. Исто така, се специфицираат потребните претпоставки.

Треба да се примети дека условите за регуларност за дескрипторски систем на зададената GP (2.1) се формулирани во трудот (Tabaka & Katayama, 1998) (да се видат

исто така условите (CA2)-(CA5) во трудот (Tabaka & Katayama, 1998)). Тука тие се презентираат како следи:

Претпоставка 3.1. *Матричниот молив – матричниот пар $(A-sE, B_2)$ е импулно контролабилен, и матричниот молив – матричниот пар $(C_2, A-sE)$ е импулно обсервабилен.*

Претпоставка 3.2. *Матричниот молив – матричниот пар $(A-sE, B_2)$ е стабилизабилен по конечната динамика (finite dynamics stabilizable), и матричниот молив – матричниот пар $(C_2, A-sE)$ е детектабилен по конечната динамика (finite dynamics detectable).*

Всушност, Претпоставките 1 и 2 се неопходни услови за постоење на управувач кој што го прави системот затворен со повратна спрега стабилен и без импулси.

Претпоставка 3.3. *Матричните моливи*

$$\begin{bmatrix} A-sE & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A-sE & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

имаат полни рангови по колони и редици, респективно, на имагинарната оска.

Претпоставка 3.4. *Матричните моливи (3.1) немаат нули во бесконечност (или бесконечни генерализирани карактеристични вредности со ред >1).*

Понатаму ќе ни треба следната дефиниција.

Дефиниција 1. *Дескрипторската GP претставена со (2.1) е регуларна ако ги задоволува Претпоставките 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4.*

Како што подоцна ќе илустрираме со Пример 3.4, претпоставката дека матриците D_{12} и D_{21} треба да имаат полн ранг по колони и редици, респективно, е беспотребно премногу строга за одредување дали системот е регуларен или не е. Таква претпоставка е воведена во трудовите (Tabaka & Katayama, 1998), (Takaba, Morihira, & Katayama, 1994) за да може да се напише GARE. (Да се примети дека GARE ги вклучува членовите $(D_{12}^T D_{12})^{-1}$ и $(D_{21} D_{21}^T)^{-1}$.)

3.2.1 Важноста на регуларноста

Како прв чекор кон наоѓањето на процедура за решавање на погоре-дискутираните управувачки проблеми, ги дефинираме следно условите за регуларност на генерализирана постојка дефинирана во состојбен простор. За оваа намена, да се видат исто така условите (i), (ii), (iii) и (iv) во Поглавје 14.5 од трудот (Zhou, Doyle, & Glover, 1996).

Дефиниција 2. Состојбената GP, зададена со матриците \mathcal{A} , \mathcal{B}_1 , \mathcal{C}_1 , \mathcal{D}_{11} , \mathcal{D}_{12} , \mathcal{D}_{21} и \mathcal{D}_{22} , е регуларна, ако важат следните Претпоставки 3.5, 3.6 и 3.7.

Претпоставка 3.5. Матричниот пар $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2)$ е стабилизабилен и матричниот пар $(\mathcal{A}, \mathcal{C}_2)$ е детектабилен.

Претпоставка 3.6. Матричните моливи

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} - sI & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A} - sI & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

имаат полн ранг по колони и редици, респективно, на имагинарната оска.

Претпоставка 3.7. Матриците \mathcal{D}_{12} и \mathcal{D}_{21} имаат полн ранг по колони и редици, респективно.

Ирегуларната состојбена GP е многу тешка за управување. Следните се четири суштествени причини зошто е тоа така, кои причини важат за генеречки ирегуларна GP:

(i) Проблемот на H_2 -управување нема решение (Stefanovski J. D., 2010).

(ii) Што се однесува до H_∞ управувачите, ако матричните моливи (3.2) имаат нули на имагинарната оска (Претпоставката 3.6 не е задоволена) или во бесконечност (Претпоставката 3.7 не е задоволена), добиениот управувач не е стабилизирачки, бидејќи постојните нули на проширената имагинарна оска ќе се појават како модови на системот со повратна спрега (кога, да се види Поглавје 17 од (Zhou, Doyle, & Glover, 1996), е применет алгоритмот базиран на решавање на алгебарски Рикатиеви равенки, ARE) или тој е блиску-до-нестабелизирачки (кога, да се види (Gahinet & Apkarian, 1994), е применет алгоритмот базиран на решавање LMI).

(iii) Методот на H_∞ управување, којшто е базиран на решавање ARE (Поглавје 17 од (Zhou, Doyle, & Glover, 1996)), бара издвојување на нули од матрични моливи со Хамилтонијан-структура (Hamiltonian matrix pencils). Ако матричните моливи (3.2) имаат нули на имагинарната оска, т.е., ако GP има инваријантни нули на проширената имагинарна оска, тогаш овие инваријантни нули се појавуваат во пар и со извесен не-прост мултиплицитет во придружениот матричен молив со Хамилтонијан структура.

Но, докажано е во трудот (Doogen, 1979) дека издвојувањето на не-прости нули од матрични моливи не е поуздано (бидејќи наместо точните нули, неточни броеви ќе се појават на произволни места во комплексната рамнина).

(iv) Еден суштински недостаток на ирегуларните дескрипторски GP е илустриран тука, со помош на погоден пример.

Пример 3.1. Нека е зададена генерализирана постројка во состојбен простор, со следните матрици

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C}_2 = [0 \quad 1 \quad 0], \\ \mathcal{D}_{11} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}_{21} &= [-1 \quad 0], \mathcal{D}_{22} = -1. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Оваа GP не е регуларна, бидејќи Претпоставката 3.7 не е задоволена. Со употреба на командата `hinfsv` со опцијата `'lmi'`, наоѓаме $\gamma = 1.9584$ и наоѓаме H_∞ оптимален управувач за овој проблем:

$$K := \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -1.84 \cdot 10^3 & -4.94 \cdot 10^3 & 1.15 \cdot 10^6 & -0.76 \cdot 10^0 \\ 1.56 \cdot 10^3 & 4.18 \cdot 10^3 & -9.75 \cdot 10^5 & 0.15 \cdot 10^0 \\ 1.75 \cdot 10^5 & 4.72 \cdot 10^5 & -1.10 \cdot 10^8 & 4.46 \cdot 10^1 \\ 3.94 \cdot 10^3 & 1.06 \cdot 10 & -2.47 \cdot 10^6 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Врз база на овој оптимален управувач, ние гледаме дека неговата реализација не е изводлива, бидејќи неговите коефициенти се многу големи, т.е., од ред на величини 10^8 во магнитуда. Според тоа, овој управувач не е физички реализабилен. На пример, ако реален актуатор е мотор, ќе се бара истиот да биде со моќност од 10^8 Вати. Треба да се забележи исто така, дека два “брзи” модови, еднакви на -3.9685×10^4 и -0.1759×10^4 , се појавуваат во системот затворен со повратна спрега.

Пробувањето со други H_∞ управувачки алгоритми не дава успех. Навистина, ако се примени командата `hinfsys` со опцијата `'ric'`, најголем коефициент ќе биде 1.085×10^{11} , и 1.582×10^{11} , ако се примени опцијата `'maxe'`.

Овој ефект којшто е недостаток кај H_∞ управувачите е веќе приметен во литературата. Како пример, во воведот од трудот (Gahinet P., 1992) се вели, цитираме: "Кога се приближуваме до оптималното -0.1759×10^4 слабеење γ_{opt} , ефекти на блиску-до-сингуларност се појавуваат во овие формули, кои ги прават пресметките сензитивни". (Како исклучок, да се види Пример 3.4, каде овој ефект на недостаток не се појавува).

Од денешен аспект на H_∞ управувањето, во околина на оптималното решение, три видови на проблеми се појавуваат: (a) Големи коефициенти во решението за управувач, коишто не можат да се реализираат физички; (b) “Брзи модови” (“Fast modes”) во системот затворен со повратна спрега на H_∞ управувач; и (c) Еден вид на неробустност на стабилноста во однос на мали варијации на коефициентите на управувачот и/или постројката. Понатаму, треба да се примети дека проблемот во точка (c) е поврзан со проблемот во точка (b) на таков начин што брзите модови, кои се близу до бесконечност (бесконечноста припаѓа на проширената имагинарна оска, исто така), би можеле да ја прескокнат имагинарната оска под влијание на мали варијации на коефициентите на управувачот и/или постројката. (Исто така, да се види Пример 1 во трудот (Stefanovski J. D., 2015).)

Познато е од трудот (Stefanovski J. D., 2015) како да се избегнат овие проблеми за случајот кога придружната матрица на Пик (Pick matrix) е сингуларна, во кој случај постои минимум на H_∞ управувачкиот проблем. Таму е покажано дека постои стабилизирачки управувач таков што H_∞ -нормата на преносната матрицата на системот со повратна спрега е еднаква на инфималната, каде штом инфимумот е земен над множеството на сите стабилизирачки управувачи. Причина зошто се појавуваат големи

коэффициенти во Примерот 1 е дека Претпоставката 3.7 не е задоволена. Како резултат, не постои минимум на H_∞ управувачкиот проблем за оваа GP. Во генерички случај, H_∞ управувачкиот проблем за ирегуларна дескрипторска GP нема минимум. (Како забележителен исклучок, да се види Пример 3.2 подолу.) Според тоа, многу е корисно доколку можеме однапред да одредиме дали дескрипторскиот систем е регуларен или ирегуларен.

Од оваа точка на посматрање, во оваа глава се даваат два нови резултати:

(*) Утврден е првиот придонес (Теорема 3.1): Нов пристап за решавање на проблемот за управување на дескрипторска GP, базиран на константно управување со повратна врска по мерениот излез, што се користи за трансформација на дадената дескрипторска GP во состојбена GP. Пристапот е различен и поедноставен отколку постоечките пристапи во литературата.

(**) Утврден е вториот придонес (Теорема 3.2): Потребни и доволни услови за регуларност за дескрипторската GP, дадени со помош на матриците коишто ја дефинираат еквивалентната GP во состојбен простор.

Велиме дека (Ishihara & Terra, 2001) матричниот молив-матричниот пар $(A - sE, B)$ е стабилизабилен по конечни модови (finite dynamics stabilizable) и импулсно контролабилен (impulse controllable) ако дескрипторскиот систем $E\dot{x} = Ax + Bu$ е стабилизабилен по конечни модови и импулсно контролабилен. Понатаму, велиме дека матричниот молив-матричниот пар $(C, A - sE)$ е детектабилен по конечни модови (finite dynamics detectable) и импулсно обсервабилен (impulse observable) ако дескрипторскиот систем $E\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ е детектабилен по конечни модови и импулсно обсервабилен (Ishihara & Terra, 2001). Дескрипторскиот систем $E\dot{x} = Ax$ со регуларен матричен молив $A - sE$ (и матричниот молив $A - sE$) велиме дека е стабилен по конечна динамика (finite dynamics stable) и без импулси (impulse-free) ако конечните нули на $A - sE$ се во областа $\Re[s] < 0$ и ако $\text{RM}(A - sE)^{-1}$ е својствена.

$$\text{Означуваме } \begin{bmatrix} A - sE & B \\ C & D \end{bmatrix} := D + C(sE - A)^{-1}B.$$

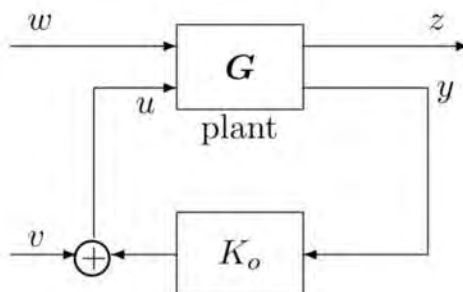
3.3 Нова трансформација на дескрипторската SCS во состојбена SCS

Во ова поглавје, разгледуваме дескрипторска GP, зададена со формата (2.1). Знаеме од Лема 3.11 во трудот (Losse, Mehrmann, Porre, & Reis, 2008) дека постои реална матрица K_o таква што матричниот молив $A + B_2 K_o C_2 - sE$ е регуларен и без импулси ако и само ако важи Претпоставката 3.1. Всушност, скоро сите константни матрици K_o можат да се применат, а матричниот молив $A + B_2 K_o C_2 - sE$ може да има конечни нули во $\Re[s] \geq 0$.

Го применуваме следното помошно управување со статичка повратна спрега по излезот

$$u = K_o y + v, \quad (3.5)$$

каде v е нов управувачки вектор. Ова делување е претставено на Слика 2.



Слика 3 Трансформирана постројка со воведено управување со статичка повратна спрега по излезот

Според тоа, дескрипторскиот систем (2.1) постанува

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= (A + B_2 K_o C_2)x + (B_1 + B_2 K_o D_{21})w + B_2 v, \\ z &= (C_1 + D_{12} K_o C_2)x + (D_{11} + D_{12} K_o D_{21})w + D_{12} v, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} v. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Нека го пре-запишеме дескрипторскиот систем како

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}v, \\ y &= \mathcal{C}x + \mathcal{D}v, \end{aligned} \quad (3.7)$$

каде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= A + B_2 K_o C_2, \mathcal{B} := [B_1 + B_2 K_o D_{21}, B_2], \\ \mathcal{C} &:= \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} K_o C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &:= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} K_o D_{21} & D_{12} \\ & D_{22} \end{bmatrix}, \\ \bar{v}(t) &:= \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \bar{y}(t) := \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Бидејќи матричниот молив $\mathcal{A} - sE$ е регуларен и без импулси, постојат несингуларни матрици U и V такви што

$$UEV = \begin{bmatrix} I_\ell & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad UAV = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \ell \\ n-\ell \end{matrix}, \quad (3.8)$$

за некои матрици \mathcal{A}_{ij} , $i, j = 1, 2$, каде матрицата \mathcal{A}_{22} е несингуларна и $\ell = \text{rank}(E)$.

Понатаму, нека ги воведеме следните партиционирани матрици

$$\begin{matrix} r & p \\ \ell \{ & \\ n-\ell \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix} := UB, \quad \begin{matrix} \ell & n-\ell \\ m \{ & \\ q \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{bmatrix} := CV \quad (3.9)$$

и партиционирани вектори

$$\begin{matrix} \ell \{ \\ n-\ell \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} := V^{-1}x(t), \quad \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix} := V^{-1}x_0.$$

Со нив, дескрипторскиот систем (3.7) постанува

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21})\xi \\ &+ (\mathcal{B}_{11} - \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21})w + (\mathcal{B}_{12} - \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22})v, \\ z &= (\mathcal{C}_{11} - \mathcal{C}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21})\xi \\ &+ (\mathcal{D}_{11} - \mathcal{C}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21})w + (\mathcal{D}_{12} - \mathcal{C}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22})v, \\ y &= (\mathcal{C}_{21} - \mathcal{C}_{22} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21})\xi \\ &+ (\mathcal{D}_{21} - \mathcal{C}_{22} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21})w + (\mathcal{D}_{22} - \mathcal{C}_{22} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22})v, \end{aligned} \quad (3.10)$$

и

$$\eta = -\mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21} \xi - \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21} w - \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22} v . \quad (3.11)$$

Системот (12) исто така има форма на GP, но е даден во состојбен простор, наместо во дескрипторски. Навистина, со воведување на следните матрици.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21}, \\ [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] &:= [\mathcal{B}_{11} - \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21}, \quad \mathcal{B}_{12} - \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22}], \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11} - \mathcal{C}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21} \\ \mathcal{C}_{21} - \mathcal{C}_{22} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} - \mathcal{C}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21} & \mathcal{D}_{12} - \mathcal{C}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22} \\ \mathcal{D}_{21} - \mathcal{C}_{22} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21} & \mathcal{D}_{22} - \mathcal{C}_{22} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

системот (12) постанува

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathcal{A} \xi(t) + \mathcal{B}_1 w(t) + \mathcal{B}_2 v(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \\ z(t) &= \mathcal{C}_1 \xi(t) + \mathcal{D}_{11} w(t) + \mathcal{D}_{12} v(t), \\ y(t) &= \mathcal{C}_2 \xi(t) + \mathcal{D}_{21} w(t) + \mathcal{D}_{22} v(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

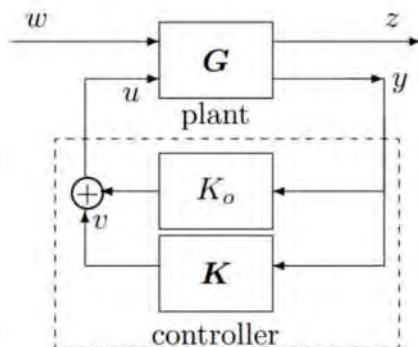
Сега сме спремни да ја формулираме и докажеме следната теорема.

Теорема 3.1. *Под Претпоставките 3.1 и 3.2, управувач \mathbf{K} ја прави генерализираната постројка во состојбен простор, зададена со (14), стабилна и без импулси, и има преносна матрица на системот со повратна спрега \mathbf{H} , ако и само ако управувачот $\mathbf{K}_{ds} := \mathbf{K}_o + \mathbf{K}$ ја прави дескрипторската генерализирана постројка (1) стабилна и без импулси, и ја има истата преносна матрица на системот со повратна спрега \mathbf{H} .*

Доказ. Ако состојбениот систем со повратна спрега е стабилен, тогаш дескрипторскиот систем со повратна спрега (2.1) е стабилен и без импулси. Така е бидејќи интерната променлива $\xi(t)$ и помошното управување $v(t)$, со оглед на конструкцијата на управувачот на состојбената постројка (3.12) се стремат кон нула кога $t \rightarrow \infty$ и нема импулси во $t=0$, во случајот нарушувањето $w(t)$ да ги поседува тие својства, и интерната променлива $\eta(t)$ исто така, што се гледа од (3.11), се стреми кон нула кога $t \rightarrow \infty$ и нема импулси во $t=0$. Само конечни скокови во $t=0$ на $\eta(t)$ можат да постојат, во случајот кога $\eta_0 \neq -\mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{21} \xi_0 - \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{21} w(0) - \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{B}_{22} v(0)$.

Доказот на обратното тврдење е потполно аналоген, и затоа е испуштен. Δ

Актуелната структура на управувачот на постројката е прикажана на Слика 3, каде е прикажан исто така целосниот систем со повратна врска.



Слика 4. Дескрипторска SCS со резултантниот управувач во повратна спрега.

Забелешка 3.1: За да се добие состојбен систем од дескрипторскиот систем (3.6), наместо трансформацијата дадена со матриците U и V , можеме да ја примениме командата `minreal` од MATLAB. Меѓутоа, во тој случај ќе немаме пристап до физичките состојбени променливи $x(t)$, туку само до некои вештачки состојбени променливи.

Пример 3.2 Овој пример ја илустрира примената на Теорема 3.1 на ирегуларна GP за која постои минимум на H_∞ управувачкиот проблем. Нека биде зададена дескрипторската генерализирана постројка од Примерот во трудот (Inoue, Wada, Ikeda, & Uezato, 2015) со $\alpha = 0$, т.е.,

$$\left. \begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [0 \ 1 \ 1], \quad C_2 = [0 \ 2 \ 1], \end{aligned} \right\}$$

и $D_{11} = D_{12} = D_{21} = D_{22} = 0$. Да се забележи дека Претпоставката 3.3 не е задоволена, бидејќи матричниот молив оддесно во (3.1) има нула во $s=0$. Со употреба на алгоритмот на Теорема 3.1 со $K_o = 2.3$, и LMI алгоритмот за H_∞ управување на постројки во состојбен простор со $\gamma = 0.3$, (Gahinet & Arkarian, 1994), добиваме константен управувач $K_{ds} = 8.5007549$. Овој управувач има предност во однос на

управувачот во трудот (Inoue, Wada, Ikeda, & Uezato, 2015), бидејќи во (Inoue, Wada, Ikeda, & Uezato, 2015), добиен е управувач со ред 2 на реализацијата.

Вкупниот алгоритам е зависен од K_o . Навистина, ако земеме $K_o = 3$, добиваме константен управувач $K_{ds} = 6.0023980$. Минимумот $\gamma = 0.3$ е достигнат со двата константни стабилизирачки управувачи.

3.4 Главен резултат за условите за регуларност на дескрипторска GP

Во ова поглавје се враќаме кон оригиналниот дескрипторски систем (2.1). Недостаток на Дефиницијата 1 за регуларен дескрипторски GP е тоа дека Претпоставката 3.4 не е едноставна, како што е едноставна аналогната Претпоставка 3.7, којашто се однесува на состојбена GP. Следната теорема претставува едноставен тест за регуларност на дескрипторската GP.

Теорема 3.2 *Дескрипторската GP (2.1) е регуларна ако и само ако состојбената GP (3.12) е регуларна.*

Доказ. Ги имаме следните релации со матрични моливи:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A-sE & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ K_0 C_2 & K_0 D_{21} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B_2 K_0 C_2 - sE & B_1 + B_2 K_0 D_{21} & B_2 \\ C_1 + D_{12} K_0 C_2 & D_{11} + D_{12} K_0 D_{21} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} A-sE & B \\ C & D \end{bmatrix}^{U,V} \sim \begin{bmatrix} A_{11} - sE & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \\
 & \stackrel{c}{\sim} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} - sI & A_{12} & B_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{21} & B_{12} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{22} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ C_{11} - C_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & C_{12} & D_{11} - C_{12} A_{22}^{-1} B_{21} & D_{12} - C_{12} A_{22}^{-1} B_{22} \\ C_{21} - C_{22} A_{22}^{-1} A_{21} & C_{22} & D_{21} - C_{22} A_{22}^{-1} B_{21} & D_{22} - C_{22} A_{22}^{-1} B_{22} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} A-sE & A_{12} & B_1 & B_2 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ C_1 & C_{21} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(3.13)

каде со $\overset{C}{\sim}$ ја означуваме стриктната еквиваленција на матрични моливи по колони, т.е., стриктна еквиваленција со дозволени само операции меѓу колоните на матричниот молив, и со $\overset{U,V}{\sim}$ ја означуваме стриктната еквиваленција со матриците U и V дефинирани во (3.8) и (3.9). Исто така, имаме

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} I & 0 & B_2 K_0 \\ 0 & I & D_{12} K_0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-sE & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A+B_2 K_0 C_2 - sE & B_1 + B_2 K_0 D_{21} & B_2 \\ C_1 + D_{12} K_0 C_2 & D_{11} + D_{12} K_0 D_{21} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A-sE & B \\ C & D \end{bmatrix} \overset{U,V}{\sim} \begin{bmatrix} A_{11}-sE & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \\
 & \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} - sI & 0 & B_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{21} & B_{12} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{22} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} - C_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & 0 & D_{11} - C_{12} A_{22}^{-1} B_{21} & D_{12} - C_{12} A_{22}^{-1} B_{22} \\ C_{21} - C_{22} A_{22}^{-1} A_{21} & 0 & D_{21} - C_{22} A_{22}^{-1} B_{21} & D_{22} - C_{22} A_{22}^{-1} B_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A-sE & 0 & B_1 & B_2 \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

каде со $\overset{r}{\sim}$ ја означуваме стриктната еквиваленција на матрични моливи по редици, т.е., стриктна еквиваленција со дозволени само операции меѓу редиците на матричниот молив.

Тврдењето на еквиваленција во Теоремата 3.1 сега следува веднаш од овие релации на стриктна еквивалентност. Специјално, матричните моливи (3.1) немаат нули во бесконечност ако и само ако матричните моливи (3.2) немаат нули во бесконечност, т.е. матриците D_{12} и D_{21} имаат полни рангови. Δ

Пример 3.3 Овој пример илустрира ирегуларна дескрипторска GP. Нека е зададена дескрипторската GP, со

$$\left. \begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [1 \ 1 \ 0 \ -1], \\ D_{11} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{21} = [0 \ 1], D_{22} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Да се забележи дека преносната матрица \mathbf{G} е несвојствена. Навистина, матричниот молив $sE - A$ не е без импулси.

Со употреба на алгоритмот од Поглавје 3.3 со $K_o = 1$, најпрвин ја трансформираме дескрипторската GP во состојбена GP. На овој начин ние ја добиваме состојбената генерализирана постројка (3.3).

Иако матрицата D_{12} има полн ранг по колони, матрицата \mathcal{D}_{12} нема полн ранг по колони. Следователно, со примена на Теорема 3.2, дескрипторската GP од овој пример не е регуларна.

Со примена на формулата (3.5), го наоѓаме управувачот за \mathbf{H}_∞ дескрипторски управувачки проблем: $\mathbf{K}_{ds} := K_o + \mathbf{K}$.

$$\mathbf{K}_{ds} = \begin{bmatrix} -1.84 \cdot 10^3 & -4.94 \cdot 10^3 & 1.15 \cdot 10^6 & -0.76 \cdot 10^0 \\ 1.56 \cdot 10^3 & 4.18 \cdot 10^3 & -9.75 \cdot 10^5 & 0.15 \cdot 10^0 \\ 1.75 \cdot 10^5 & 4.72 \cdot 10^5 & -1.10 \cdot 10^8 & 4.46 \cdot 10^1 \\ 3.94 \cdot 10^3 & 1.06 \cdot 10^4 & -2.47 \cdot 10^6 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Пример 3.4. Овој пример ја илустрира примената на H_∞ управувачкиот алгоритам базиран на LMI, на регуларната дескрипторска GP, така што минимум постои. Нека е зададена дескрипторска постројка (2.1), со следните матрици:

$$\left. \begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 1], \\ D_{11} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{21} = [0 \quad 0], D_{22} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Бидејќи половиот матричен молив $sE - A$ не е без импулси, кореспондентната преносна матрица \mathbf{G} е несвојствена.

Слично како во претходниот пример, со примена на формулите изведени во Поглавје 3.3 со $K_o = 1$, се добиваат следните матрици, коишто дефинираат состојбена GP:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} -1.306 & 0.437 & 12.805 \\ -0.535 & -1.768 & 15.643 \\ 0.076 & -0.274 & -4.925 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.396 & 1.975 \\ 1.101 & 3.292 \\ 0.795 & -0.510 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} -2.196 \\ -1.597 \\ 0.790 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}_1 &= \begin{bmatrix} -0.245 & 0.245 & -5.249 \\ -0.144 & -0.223 & -5.910 \end{bmatrix}, \mathcal{C}_2 = [-0.168 \quad -0.585 \quad 3.410], \\ \mathcal{D}_{11} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}_{21} &= [0 \quad 1], \mathcal{D}_{22} = -1. \end{aligned} \right\}$$

Дури иако матрицата D_{21} нема полн ранг по редици, матриците \mathcal{D}_{12} и \mathcal{D}_{21} имаат полни рангови по колони и редици, респективно. Од Теорема 3.2 следи дека дескрипторската GP од овој пример е регуларна. Уште еднаш да нагласиме дека дескрипторската GP е регуларна ако и само ако состојбената GP е регуларна.

Бидејќи оваа дескрипторска GP е регуларна, со употреба на постоечките методи може да се конструира оптимален H_∞ управувач, од дадениот состојбен GP. За да го

решиме проблемот на наоѓање на оптимален H_∞ управувач би можеле да употребиме еден од постоечките методи: методот базиран на две алгебарски Рикатијеви равенки ARE (Algebraic Ricatti Equations), базиран на линеарни матрични неравенства LMI (Linear Matrix Inequalities), или базиран на матрична ентропија (Maximum Entropy). Методот употребен во овој случај е LMI методот, бидејќи споредбено со другите методи дава помали вредности на коефициентите на управувачот.

Со употреба на командата `hinfsv` со опција `'lmi'`, наоѓаме $\gamma = 3$ и еден H_∞ оптимален управувач за овој проблем:

$$\mathbf{K} =: \begin{bmatrix} -1.372 & 0.024 & -0.223 & -1.631 \\ -2.204 & -11.73 & -4.672 & -3.624 \\ -0.475 & -0.8226 & -6.096 & -0.069 \\ 0.083 & -1.128 & -0.334 & 0 \end{bmatrix}$$

Откога се најде оптимален управувач \mathbf{K} за состојбената GP, можеме да го најдеме оптималниот управувач за оригиналната дескрипторска GP. Последниов е даден со

$$\mathbf{K}_{ds} =: \begin{bmatrix} -1.372 & 0.024 & -0.223 & -1.631 \\ -2.204 & -11.73 & -4.672 & -3.624 \\ -0.475 & -0.8226 & -6.096 & -0.069 \\ 0.083 & -1.128 & -0.334 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Оптималниот управувач (3.16), за разлика од управувачот (3.15) за дескрипторскиот систем од Примерот 3.3, има значително помали коефициенти кои се физички остварливи.

Пример 3.5. Овој пример ја илустрира примената на \mathbf{H}_∞ алгоритмот од трудот (Stefanovski J. D., 2015) на регуларна дескрипторска GP, при што минимум постои. Нека е зададена дескрипторската GP со следните матрици ($p=1, q=1$):

$$\left. \begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2.546800010 & 0.542620615 & -2.673142575 \\ -0.018970583 & -1.023913513 & 1.482119155 \\ -0.796481924 & -1.436530750 & 0 \end{bmatrix}, \\ [B_1 \quad B_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0.758363908 & -0.609229362 \\ 0 & 0.158690061 & -0.127483181 \\ 0 & -0.750180003 & -0.750180003 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.389610579 & 0.18636790 & 0 \\ 0.038857022 & -0.232571893 & 0.765265192 \\ -0.093724077 & 0.560969032 & 0.765265192 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.325041337 & 0.261120979 \\ 0 & 0.784007566 & -0.629830118 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Да се примети дека преносната матрица \mathbf{G} , која соодветствува на дескрипторскиот систем (3.17), е полиномијална матрица.

Со примена на алгоритмот од Теорема 3.1 со $K_o = -1$, ја трансформираме дескрипторската структура (3.17) во следната состојбена структура:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

Последнава структура се разликува од структурата на системот во Примерот 4.4 во трудот (Benner, Byers, Losse, Mehrmann, & Xu, 2011) само во елементот \mathcal{D}_{22} . (Тука $\mathcal{D}_{22} = 1$, додека во (Benner, Byers, Losse, Mehrmann, & Xu, 2011), $\mathcal{D}_{22} = 0$.) Оптималниот \mathcal{H}_∞ управувач пресметан во (Benner, Byers, Losse, Mehrmann, & Xu, 2011) (за случајот $\mathcal{D}_{22} = 0$), го означуваме со $\hat{\mathbf{K}}$.

Ако воведеме мерен излез со равенката $y_1 = y - D_{22}u$, би можеле да го искористиме управувачот \hat{K} . Потоа, лесно е да се провери дека оптималниот H_∞ управувач, кој ќе го означиме со K_{ds} за дескрипторската структура (19) е даден со

$$K_{ds} = -\frac{1}{1 + \hat{K}}$$

Еден мод на системот со повратна спрега е “брзиот“ мод -122.49 , кој предизвикува проблеми со стабилноста.

(Тичниот) единствен оптимален H_∞ управувач за дескрипторската структура (3.17), пресметан со алгоритмот од трудот (Stefanovski J. D., 2015), е даден со

$$K_{ds} = -\frac{s+3}{2s+4} \text{ и минимумот } \gamma = 3 \text{ е достигнат со овој управувач.}$$

3.5 Примена на Теорема 3.1 во H_∞ управување на дескрипторска GP

Ова поглавје ја илустрира итеративната примена на Теорема 3.1 за наоѓање на H_∞ управувач. Нека го разгледуваме дескрипторскиот систем (2.1), без равенката која го дефинира мерењето y , и сметаме дека управуваниот излез z и нарушувањето w се мерливи. Мерливоста на z не е рестриктивна претпоставка, бидејќи не можеме да ја оценуваме ефикасноста на управувачот во реално време, ако не е познат сигналот $z(t)$. Од друга страна, мерливоста на w е рестриктивна претпоставка, но ако нарушувањето w не е мерливо, можеме да конструираме естиматор за w (види Теорема 17.5 во книгата (Zhou, Doyle, & Glover, 1996)).

Применуваме статичко управување со повратна спрега (Static Output Feedback) (SOF), што го прави системот со затворена повратна спрега стабилен и без импулси, $u = -Kz + v$, за некоја константна матрица K , којашто треба да се одреди. Неопходни услови на постоење се Претпоставките 3.1 и 3.2. Неопходните услови не се и доволни, видете (Stefanovski & Dimirovski, A new approach to static output feedback stabilization of linear dynamic systems, 2006), за случајот $E = I$.

Потоа го добиваме следниов дескрипторски систем

$$E\dot{x} = (A - B_2K_1C_1)x + (B_1 - B_2K_1D_{11})w + (B_2 - B_2K_1D_{12})v,$$

$$z = (I + D_{12}K)^{-1}(C_1x + D_{11}w + D_{12}v),$$

каде

$$K_1 = (I + KD_{12})^{-1}K. \quad (3.18)$$

Сега определуваме ново управување со $v = -Yw$, за некоја RM Y којашто треба допрва да се одреди.

Нека ги воведеме следните ознаки

$$G_{12} = (I + D_{12}K)^{-1} \left[D_{12} + C_1(sE - A + B_2K_1C_1)^{-1}(B_2 - B_2K_1D_{12}) \right], \quad (3.19)$$

$$G_{11} = (I + D_{12}K)^{-1} \left[D_{11} + C_1(sE - A + B_2K_1C_1)^{-1}(B_1 - B_2K_1D_{11}) \right]. \quad (3.20)$$

Лесно е да се види дека

$$T_{zw} = -G_{12}Y + G_{11},$$

каде T_{zw} е преносна матрица од влезот на нарушувањето до управуваниот излез. Зададено $\gamma \geq 0$, проблемот на H_∞ управување, т.е., да се најде управувач таков што системот со повратна спрега е стабилен и без импулси и $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$, се трансформира во проблемот да се најде својствена и стабилна RM Y таква што $\| -G_{12}Y + G_{11} \|_\infty \leq \gamma$, т.е., два-блоков проблем (two-block problem).

Теоремата 16.12 во (Zhou, Doyle, & Glover, 1996), при извесни претпоставки за регуларност, може да се примени на овој проблем. Меѓутоа, решението го има истиот недостаток објаснет во Поглавјето 3.1. Заради тоа, се препорачува примена на алгоритмот од трудот (Stefanovski J., 2018). Навистина, лесно е да се трансформира два-блоковиот проблем во проблемот да се најде својствена и стабилна RM Φ којашто го задоволува идентитетот $V_a\Phi = U_a$ и неравенството $\|\Phi\| \leq 1$, за некои RM V_a и U_a .

Во случајот на перфектно распрегање на нарушувањето ($T_{zw} = 0$), постои својствено и стабилно решение Y на матричната равенка

$$G_{12}Y = G_{11}. \quad (3.21)$$

Лесно е да се увиди дека множеството решенија Y на матричната равенка

$$G_{12}Y = G_{11} \quad (3.22)$$

се поклопува со множеството на решенија Y на матричната равенка (3.21).

Со решавање на дво-блоковиот проблем, го минимизираме ефектот на нарушувањето врз управуваниот излез z . Од друга страна, ефектот на почетните услови на постројката врз z не е минимален. Меѓутоа, и него можеме да го минимизираме со избор на матрицата K на SOF $u = -Kz$, така што линеарно-квадратниот (LQ) критериум

$$J = \int_0^{\infty} [z(t)^T Q z(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (3.23)$$

за некои позитивно семи-дефинитни матрици Q и R , кои се воведени за подесување, е минимален под услов $w(t) = 0$. Последниов проблем не е конвексен. Познато е од трудот (Syrmos, Abdullah, Dorato, & Grigoriadis, 1997) дека тој може да биде нерешлив. Ние предлагаме тука алгоритам за пребарување (searching algorithm), со употреба на командата *fminsearch* од MATLAB. За да го формулираме тоја алгоритам, најпрвин мораме да го пресметаме интегралот J во (3.23). Ако $u = -Kz$ и $w = 0$, имаме

$$E\dot{x} = \hat{A}x, \quad (3.24)$$

и $z = \hat{C}_1 x$, каде $\hat{A} = A - B_2 K_1 C_1$ и $\hat{C}_1 = (I - D_{12} K_1) C_1$, каде матрицата K_1 е зададена со (3.18). Имаме $u = -K_1 C_1 x$, и

$$z^T Q z + u^T R u = x^T \hat{Q} x, \quad (3.25)$$

каде

$$\hat{Q} = \hat{C}_1^T Q \hat{C}_1 + C_1^T K_1^T R K_1 C_1.$$

Нека P биде решение на следниот генерализиран систем на Љапунов:

$$\begin{aligned} E^T P &= P^T E, \\ \hat{A}^T P + P^T \hat{A} + \hat{Q} &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Системот (3.26) може да се реши со трансформација во матрична равенка на Љапунов, врз база на Теорема 3.1.

Лесно е да се провери со употреба на идентитетите (3.24), (3.25) и (3.26) дека $J = x(0)^T E^T P x(0)$.

Критериумот J зависи од почетниот услов $x(0)$. Ние бараме управување кое е независно од почетните услови. Во случајот на применета повратна врска по состојбата, минимумот на интегралниот критериум се достигнува за минимална (во однос на матрично неравенство) матрица $E^T P$ (да се види Поглавје III во трудот (Stefanovski J., 2011)), следствено, за минимален траг на таа матрица. Од таа причина, исто така за нашиот случај со SOF управување, го минимизираме трагот на матрицата $E^T P$, т.е., $tr(E^T P)$.

Ние всушност наоѓаме оптимална матрица K_1 , (почнувајќи од некоја почетна K_1 којашто е потребна за командата *fminsearch* од MATLAB) таква што матричниот молив (matrix pencil) $\hat{A} - sE$ е без импулси и стабилен (по конечните модови) (finite – mode stable).

Наместо $tr(E^T P)$, функцијата што ја минимизираме со командата *fminsearch* од MATLAB е:

$$tr(E^T P) - \beta_1 \sum_{i=1}^{\ell} e_i + \beta_2 \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \{\Re[v_i] + \alpha\}, \quad (3.27)$$

каде $\alpha \geq 0$ е саканото растојание до нестабилност (distance to instability) на системот со повратна спрега, и v_1, \dots, v_p се конечни генерализирани карактеристични вредности (generalized eigenvalues) (FGE) на матричниот молив $\hat{A} - sE$ такви што $\Re[v_i] + \alpha > 0$, e_1, \dots, e_ℓ се негативни карактеристични вредности на симетричната матрица $E^T P$ а $\beta_1 \geq 0$ и $\beta_2 \geq 0$ се коефициенти за подесување. Двата најдесни членови во сумата (3.27) превенираат нестабилност по конечни модови на матричниот молив $\hat{A} - sE$, додека својството за непостоењето на импулси важи за генеричка матрица K_1 . За да се најде почетна K_1 таква што матричниот молив $\hat{A} - sE$ е стабилен и без импулси, ја применуваме повторно командата *fminsearch* од MATLAB. Да се примети дека условот (45) за поставување на карактеристични вредности со SOF од трудот (Syrmos, Abdullah, Dorato, & Grigoriadis, 1997), (да се види, исто така, (Stefanovski & Dimirovski, 2006)) може да не е задоволен. Сега земаме произволна почетна матрица K_1 за *fminsearch* of MATLAB, а за минимизирачка функција, земаме:

$$\left(\max_{i \in \{1, \dots, q\}} \{\Re[v_i] + \alpha\} \right)^2, \quad (3.28)$$

каде v_1, \dots, v_q се FGE на матричниот молив $\hat{A} - sE$, а $\alpha \geq 0$ е саканото растојание до нестабилност. Штом се најде матрицата K_1 , матрицата K може да се најде со инвертирање на зависноста (3.18):

$$K = K_1(I - D_{12}K_1)^{-1}. \quad (3.29)$$

Пример 3.6. Нека е зададена следната дескрипторска генерализирана постројка

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 17.5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1.5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 & 18 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 11.5 & -2 & 7.5 \\ 2.5 & -5 & 11.5 \\ 3 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 14 & -4 & 14 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да се забележи дека матричниот молив $A - sE$ не е стабилен по конечни модови и дека не е без импулси, и дека RM G_{11} и G_{12} се несвојствени и нестабилни. Инваријантни нули на реализацијата на RM G_{12} се $-1.75, 0, \pm j$ и бесконечност.

Најпрвин, со примена на Теоремата 3.1 со $K_0 = 1$ наоѓаме суб-оптимален H_∞ управувач, преку командата *hinfsyn* од MATLAB со опцијата 'lmi', каде $y = [z^T, w^T]^T$, т.е.,

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ I_{m_1} \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} D_{12} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Добиениот управувач има четири недостатоци, имено:

- a) Коэффициентите на реализацијата се големи. Најголем коэффициент е $-1.814 \cdot 10^7$, кој е всушност (6,6) –елементот на неговата “A” матрица.
- b) Модовите на системот со повратна спрега го вклучуваат “брзиот” мод $-1.8129 \cdot 10^7$.
- c) Модовите на системот со повратна спрега ги вклучуваат модовите -0.000000804 и $-0.000012752 \pm 1.000013076j$, коишто се многу блиску до имагинарната оска.
- d) Неговата реализација е со голем ред, еднаков на 7.

Сега го применуваме алгоритмот од ова поглавје. Единствено решение на (3.22) (и на (3.21)) е

$$Y(s) = \left[\begin{array}{c|cc} -1.75 & 2.261612458 & 7.861802766 \\ \hline 0.193445936 & -0.25 & -2.25 \\ 0.290168904 & 0.125 & -1.041666667 \\ -0.096722968 & 0.125 & 0.291666667 \end{array} \right]. \quad (3.30)$$

Бирајќи почетна матрица K_1 за *fminsearch* од MATLAB и минимизиращка функција (3.28) со $\alpha = 0.1$, ја добиваме матрицата

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.2947 & -2.5224 & 4.1238 & -5.6271 \\ -2.3543 & 0.0724 & -4.2729 & -0.3326 \\ 2.9017 & 4.2483 & -2.7364 & 2.3658 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

која што го прави системот со повратна спрега стабилен и без импулси.

Бирајќи $Q = I_4$, $R = 0.175 \cdot I_3$, $\beta_1 = 250$, $\beta_2 = 10000$, $\alpha = 0.1$, и почетната матрица K_1 дадена во (3.31) за *fminsearch* од MATLAB, со минимизација на функцијата (3.27), добиваме:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.353481 & -1.501509 & 8.593468 & -0.545995 \\ 0.080313 & -0.147326 & 0.643956 & -0.469936 \\ 0.606499 & -0.140463 & 1.673851 & -0.411543 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Соодветната на матрицата K_1 во (3.32) матрица K , пресметана со (3.29) е:

$$K = \begin{bmatrix} 0.648580 & -0.597968 & 3.693686 & 0.018946 \\ 0.227796 & -0.121165 & 0.839148 & -0.436490 \\ -1.440160 & 0.515415 & -4.964473 & -0.157686 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Да се забележи дека нашиот управувач ги нема недостатоците (a), (b), (c) и (d) на H_∞ управувач добиен со решавање на LMIs, којшто се наведени погоре.

И навистина:

- Коефициентите дефинирани во (3.30) и (3.33) не се големи.
- Најголем (по модул) мод на системот со повратна врска е $-7.8533 \pm 65.7855j$,
- Најблизок мод до имагинарната оска е $-0.1000 \pm 0.9977j$,
- Неговата реализација е со ред еднаков само на еден.

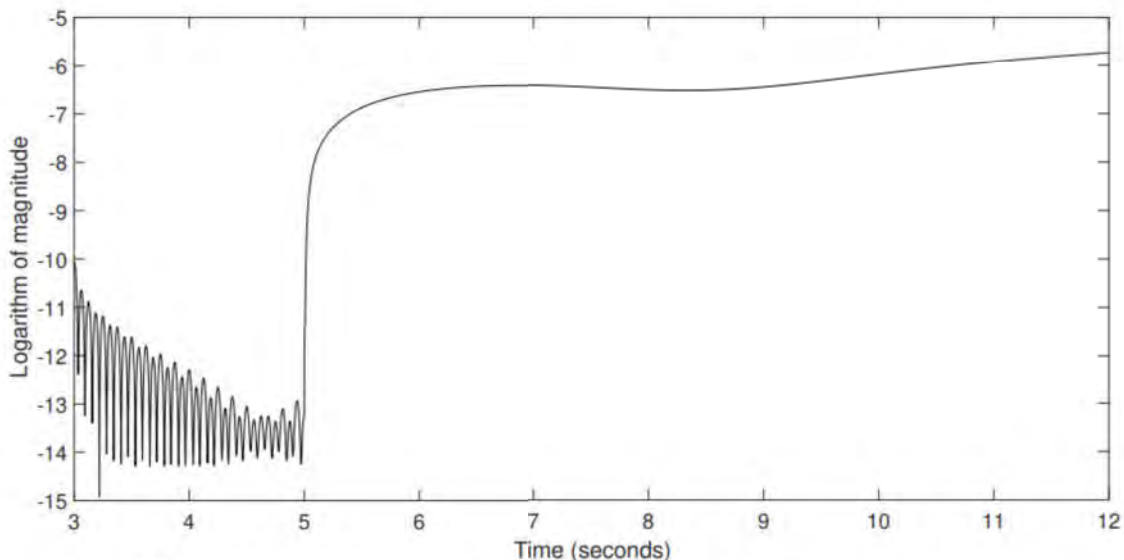
Понатаму, презентираме резултати од нумеричката симулација со SOF (3.33) плус управувањето со повратна спрега (33), и

$$w_1(t) = 1000 \sin(\omega_0(t-3)) \cdot s(t-3),$$

$$w_2(t) = 1000 \cdot s(t-5)$$

каде $s(t)$ е функција на единечен чекор (step function) и $\omega_0 = 16\pi$. Сигналот $w_1(t)$ би можел да се смета дека е нарушување, а сигналот $w_2(t)$ би можел да се смета дека е сигнал на дефект (fault).

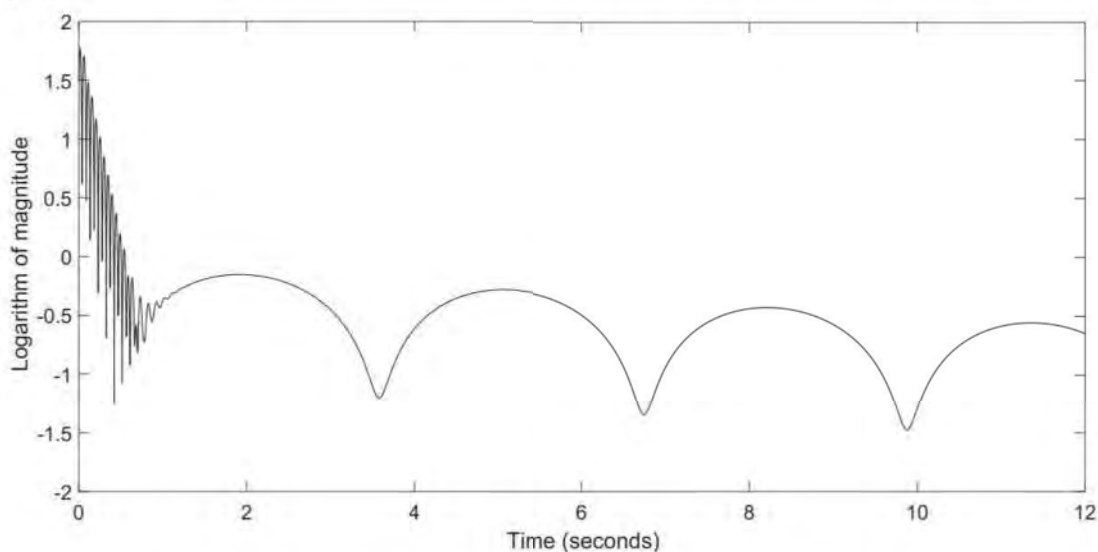
Бидејќи системот со повратна спрега е линеарен, неговиот одзив $z(t)$ е збир од одзивите на почетните услови и на влезот $w(t)$. Ако претпоставиме нулти почетни услови, добиваме $z(t) = 0$, независно од тоа која матрица K_1 ја употребуваме, таа во (3.31) или таа во (3.32), следователно, управуваниот излез $z(t)$ не е чувствителен на нарушувањето $w(t)$, и покрај големата магнитуда на $w(t)$.



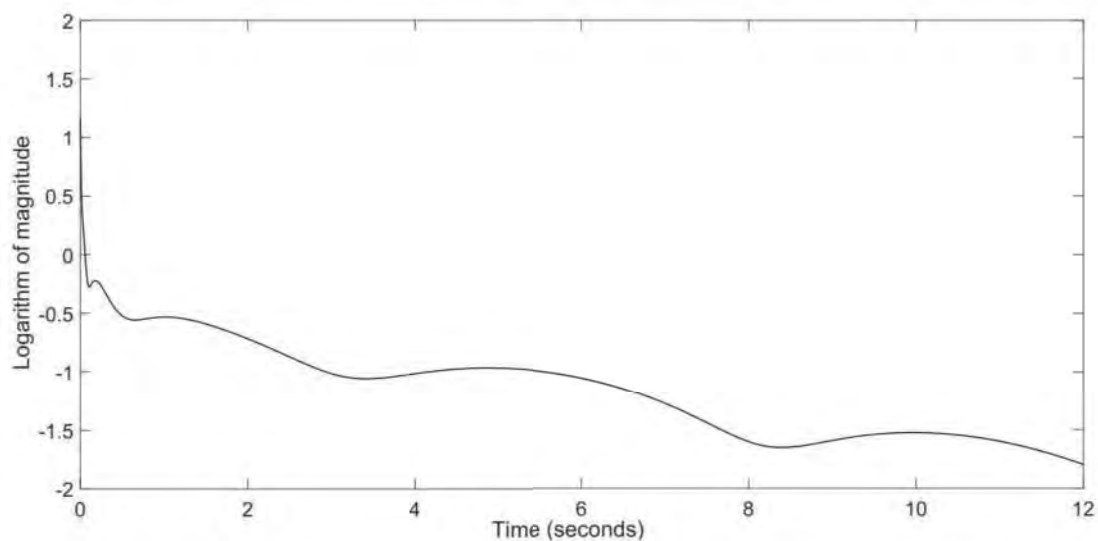
Слика 5 Временска зависност на $\|z(t)\|$ за K_1 даден во (3.32) со нулти почетни услови

Поконкретно, на Слика 1 е претставен декаден логаритам на нормата $\|z(t)\|$ $t > 3$. Гледаме од сликата дека $\|z(t)\| < 10^{-5}$. Причината зошто $z(t)$ не е нула е нумеричката неточност и дека нарушувањето има голема магнитуда.

Сега го земаме векторот $x(0) = [-0.5, 0.5, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 0, -0.5]^T$, како почетен услов на постројката, и земаме нула почетен услов на управувачот. Нормите $\|z(t)\|$, кои што кореспондираат на матриците K_1 дадени во (3.31) и (3.32), коишто се временски одзиви на почетни услови и влезови, се претставени н Слика 6 и Слика 7, респективно.



Слика 6. Временска зависност $\|z(t)\|$ за матрицата K_1 дадена во (3.31)



Слика 7 Временска зависност $\|z(t)\|$ за матрицата K_1 дадена во (3.32)

Бидејќи управуваниот излез $z(t)$ не е сензитивен на нарушувањето $w(t)$, двата одзиви се всушност сензитивни само на почетните услови $x(0)$ и, со алгоритмот од ова поглавје и со бирање на SOF матрица K , ние го минимизиравме и тој ефект. Навистина, однесувањето на управуваниот излез претставен на Слика 5 е супериорно во однос на одзивот претставен на Слика 4, бидејќи:

- i) Прескокот во $t = 0$ е помал,
- ii) Нема осцилации во околина на $t = 0$,
- iii) Осцилациите за $t \in [1, 12]$ се повеќе пригушени.

Конечен скок со позитивна магнитуда еднаква на 2.0193 во $t = 0$ се појавува во дескрипторската променлива $x_7(t)$, за матрицата K_1 дадена во (3.32).

3.6 Заклучоци

Со длабоко истражување на прашањата за директно решавање на равенката на дескрипторскиот систем, на ефикасен начин, во Теорема 3.1, претставивме практичен метод за решавање на управувачките проблеми со дескрипторските генерализирани постројки, без оглед на тоа дали се регуларни или ирегуларни, преку нивна трансформација во проблеми со системи дефинирани во состојбен простор. Потоа, со примена на постоечките методи, го решивме трансформираниот проблем со систем во состојбен простор. Методологијата може да се примени без оглед на тоа дали дескрипторската генерализирана постројка е регуларна или ирегуларна, поради предложената алгоритамска трансформација на генерализираната постројка на дескрипторски систем во проблем со генерализирана постројка во состојбен простор.

Понатаму се дефинирани условите за регуларност, за управувачките проблеми со дескрипторските GP, а во Теорема 3.2 се докажува дека оригиналната дескрипторска GP е регуларна ако и само ако GP дефинирана во состојбен простор, добиена со статички повратна спрега по излезот (SOF) е регуларна. Методот елабориран во Теорема 3.1 е пократок и поедноставен во споредба со постојните методи.

Методологијата на работа (Stefanovski J. D., 2015) за тоа како да се избегнат коефициентите со голема вредност во преносната матрица на управувачот, "брзите модови" и не-робушноста на стабилноста, се прилагоди на дескрипторска GP, преку подлабоко разбирање како се појавуваат овие проблеми при мали промени на коефициентите на управувачот и/или на постројката. Соодветни нумерички примери се презентирани во текот на анализата за деривација, кои ги разјаснуваат и ги илустрираат придонесените нови резултати.

Глава 4

Нелинеарни дескрипторски системи

4.1. Вовед

Во литературата за хибридните динамички системи се појавија значителни нови развои, во текот на последните неколку децении. Некои сегменти од овие случувања се нарекуваат диференцијално алгебарски системи. Една подкласа на овие хибридни системи се системите со префрлувачко правило на управувањето на алгебарскиот дел од системот, и се познати како превклучувачки системи, додека друга подкласа, како онаа што се разгледува во ова поглавје, се таканаречените нелинеарни дескрипторски системи. Сепак, станува зборот за еквивалентни на линеарните дескрипторски системи, за случајот на нелинеарни динамички континуирани системи. Во продолжение, следните комбинирани диференцијални и алгебарски равенки ги дефинираат нелинеарните дескрипторски системи кои се од интерес за оваа студија. Нека го разгледаме следниот систем на диференцијални и алгебарски равенки (дескрипторски систем)

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1(t), x_2(t)), \quad (4.1)$$

$$0 = h(x_1(t), x_2(t)), \quad (4.2)$$

каде $x_1 = x_1(t) \in \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 = x_2(t) \in \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$. Нека означиме

$x = x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = n_1 + n_2$. Нека со $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = x_0$ го означиме

почетниот услов за дескрипторскиот систем (1) и (2).

Се претпоставува дека функциите $f(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ имаат парцијални изводи од сите редови во \mathbb{N} . Сите парцијалните изводи не се потребни во нашите резултати.

Претпоставка 4.1: $f(0,0) = 0$ and $h(0,0) = 0$.

Множеството \mathbb{N} мора да биде инваријантно во однос на динамиката (4.1) и (4.2), т.е., кога еднаш $x_0 \in \mathbb{N}$ потоа мора $x(t) \in \mathbb{N}$ за сите $t > 0$. Важноста на множеството \mathbb{N} е илустрирана во Примерот 4.3. Одредувањето на множеството \mathbb{N} не е лесно, ако не постои физичка интерпретација на математичкиот модел (4.1) и (4.2). Во тој случај можат да се применат математички техники за естимација, како во примерот 4 од (La Salle & Lefschetz, 1961, pp. 68-70).

Системите со форма (4.1) и (4.2) се од тековен интерес, да се види (Franco, Scarcioiti, & Astolfi, 2017) и референците таму. Постојат најмалку три причини зошто разгледуваме такви системи во оваа теза:

- i. Ако системот вклучува и линеарности и нелинеарности, тогаш згодно е доколку нелинеарностите се издвојат во алгебарска равенка од типот $h(x_1, x_2) = 0$. (Очигледно, тогаш $f(x_1, x_2)$ е линеарна зависност од обликот $f(x_1, x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2$, за некои константни матрици A_1 и A_2).

 - a. На пример, во електрични кола кои содржат нелинеарни елементи (како диоди), нелинеарниот блок $h(x) = 0$ може да се избере така што да содржи само нелинеарни елементи.

- ii. Во многу системи, може да се издвои пасивен подсистем (Byrnes, Isidori, & Willems, 1991) подсистем којшто може да се направи пасивен со повратна врска, (Byrnes, Isidori, & Willems, 1991), (Fradkov, 2003), (Saber, Kokotovic, & Sussmann, 1990), (Yang, Sun, Zhang, & Ma, 2013), или конзервативен подсистем (Stefanovski J. D., 2000). На пример, ако $f(x_1, x_2)$ е конзервативна функција, тоа значи дека постои скаларна функција \mathcal{V} , којашто ја претставува вкупната енергија, таква што $\left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_n} \right]$ каде $\left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_n} \right]$ и x_1, \dots, x_n се елементи на вектор-колоната x . Важно е да се напомене дека трудовите (Willems, 1972a), (Willems, 1972b) и подоцна (Hill & Moylan, 1980) го означуваат почетокот на истражувањето на дисипативни и пасивни динамички системи (линеарните, поконкретно), како и

истражувањето на методи за поуздано управување на системи коишто се ориентирани кон пасивност.

- iii. Холономните ограничувања во мехатроничките системи се дефинираат со алгебарски ограничувања од типот (2) (да се види (Muller, 2005)). Како што ќе покажеме во Глава 7, дскрипторскиот систем (4.1) и (4.2) е природен модел за квадкoptери.

Тука ќе ги дискутираме двата широко прифатени концепти за стабилизација на нелинеарни системи, кои се афини по управувањето, зададени со:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.3)$$

$$y = h(x) + E(x)u, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (4.4)$$

каде u е управувачка векторска променлива, и y е излезна променлива. Имено, се работи за концептот на пасивизација со повратна врска (да се види Поглавје 2.4 во (Kokotović & Arsak, 2001)), и концептот по управувачки функции на Љапунов (да се види Поглавје 3.2 во (Kokotović & Arsak, 2001)). Првиот концепт бара постоење на функција $v(x)$ таква што

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} g_i(x) = h_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.5)$$

каде $[g_1, g_2, \dots, g_m] := G$ и $[h_1, h_2, \dots, h_m]^T := h$. Во случајот на векторско управување ($m > 1$), системот на парцијални диференцијални равенки (4.5) нема решение, во генерички случај на контролабилен систем. (Да се види исто така и Коментар (3) на страна 1225 во (Stefanovski J. D., 2000)). Според тоа, концептот на пасивизација со повратна врска не го користи својството на контролабилност на позитивен начин.

Во концептот со управувачки функции на Љапунов, потребно е да се најде таканаречена управувачка функција на Љапунов $v(x)$ таква што следната импликација е исполнета:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \Rightarrow \frac{\partial v(x)}{\partial x} f(x) = 0. \quad (4.6)$$

Покрај фактот што е многу комплицирано да се најде управувачка функција на Љапунов отколку функција на Љапунов, за да се провери импликацијата (4.6), системот равенки одлево во (4.6) мора да се реши по v . Аналогно со системот (4.5), и овој систем нема решение во генерички случај.

Теоремата 4.1, којашто е еден од главните резултати во оваа глава, може да се смета како генерализација на вториот дел од Последицата 1 во (Iggidr, Kalitine, & Outbib, 1996) (од линеарен во нелинеарен дескрипторски систем).

Теоремата 4.2, која што е исто така еден од главните резултати во оваа глава, ја генерализира Теоремата 4 во (Iggidr, Kalitine, & Outbib, 1996) (од управуван систем во управуван дескрипторски систем).

Четириите последици во оваа глава исто така гарантираат стабилност и стабилизабилност (можност за стабилизација), како и Теоремите 4.1 и 4.2, респективно, меѓутоа условите се всушност обсервабилност и контролабилност, кои се базираат на диференцирање на функции, и затоа тие се повеќе погодни за практични примени. Поконкретно, Последицата 4 ја користи контролабилноста на позитивен начин.

Мотивацијата за Теорема 4.2 во оваа глава е апликацијата во стабилизација на квадрокоптер. Поконкретно:

- (i) Разгледуваме позитивно семи-дефинитни финкции слични на функциите на Љапунов, наместо позитивно дефинитни, заради тоа што движењето на квадрокоптерот во хоризонтален правец, во општ случај, захтева најмалку една од координатите да не се приближува кон нула, кога $t \rightarrow \infty$. Специјално, ако со $x(t)$ ја означиме позицијата на квадрокоптерот во насоката на движење, тогаш захтеваме $x(t)$ да биде рампа-сигнал (тогаш кореспондентната брзина е ненулта), наместо $x(t) \rightarrow \infty$ кога $t \rightarrow \infty$. Додатно, движењето е возможно само ако $\theta \neq 0$ или $\phi \neq 0$, каде θ и ϕ се аглите на положбата на квадаторот (attitude angles). Според тоа, координатата x , како и координатите на положбата, не е дозволено да фигурираат во функцијата која е слична на функцијата на Љапунов.
- (ii) Разгледуваме модел на дескрипторски систем на квадрокоптер заради тоа што не постои аналитичка инверзија на алгебарската зависност (да се види Забелешката 1 и алгебарските зависности (27)). Во овој труд којшто е апликационо-ориентиран кон електрични системи на моќност, стварниот придонес е така-наречената координирана пасивизација на нелинеарни системи, преку управување, која што е за прв пат воведена во (Larsen, Janković, & Kokotović, 2003) и (Khalil, 2002), (Brogliato, Lozano, Maschke, & Egeland, 2007), (Sun, Zhao, & Dimirovski, 2009). Следните трудови (Zhao & Hill, 2008), (Liu, Stojanovski, Stankovski, Dimirovski, & Zhao, 2011), (Ma &

Dimirovski, 2016), ја прошируваат идејата за дисипативност и пасивност на дизајни на управување за превклучувачки динамички системи.

Имено, дескрипторските системи се попогодни и понапредни за опишување на природата на физичките системи, отколку системите во состојбен простор

(да се види (Duan, 2010), (Müller, 2000), (Feng & Yagoubi, 2017), (Bunjaku, Stefanovski, & Dimirovski, 2018)). Пристапот со дескрипторски системи веќе е успешно применет во управување, (да се види Пример 7.2 во тој труд).

4.2 Главен резултат

А. Стабилност на нелинеарни дескрипторски системи

Следната претпоставка ги специфицира математичките прелиминарности кои се потребни во оваа студија.

Претпоставка 4.2:

- (I) Векторската функција h има n_2 елементи.
- (II) Алгебарската равенка (4.2) по \mathbb{N} е еквивалентна со равенката $x_2 = \gamma(x_1)$, за некоја векторска функција $\gamma(\cdot)$.
- (III) Системот задаен со (4.1) и (4.2) има единствено решение $x(t)$ за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

Забелешка 1. Оваа претпоставка е природна. Навистина, Делот (I) и Делот (II) се потребни услови за единственост на решението на дескрипторскиот систем (4.1) и (4.2) Со замена на зависноста $x_2 = \gamma(x_1)$ во зависноста (4.1), се добива систем од обични диференцијални равенки $\dot{x}_1 = f(x_1, \gamma(x_1))$, на кој што стандардните резултати за постоење на решение и единственост на решение може да се применат. (На пример, Теоремата за егзистенција на страна 23 во (La Salle & Lefschetz, 1961)).

Причината зошто разгледуваме дескрипторски систем а не поедноставниот систем $\dot{x}_1 = f(x_1, \gamma(x_1))$ е тоа што не може да се најде експлицитна зависност $x_2 = \gamma(x_1)$ во општ случај.

Да се примети дека, при Претпоставката 4.2, не може да се појават импулсивни решенија во $t = 0$ на дескрипторскиот систем (4.1) и (4.2). Може да се појават само конечни скокови во $t = 0$, доколку почетните услови не се конзистентни, (Yang, Sun, Zhang, & Ma, 2013).

Последица на Претпоставката 4.2 е:

Тврдење 1: Матрицата $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_2}$ е несингуларна во \mathbb{N} .

Претпоставка 4.3: Не постојат конечни времиња на побег (finite escape times) на решенијата на дескрипторскиот систем (4.1) и (4.2), за сите почетни вредности.

Проблемот на утврдување дека нема конечни времиња на побег не е лесен. Истиот е поврзан со проблемот на одредување на множеството \mathbb{N} , за кој што веќе рековме дека не е лесен. (да се види Пример 4.3, каде го одредуваме множеството \mathbb{N} и проверуваме дали постои конечно време на побег, за сосема едноставен дескрипторски систем). Сепак, ако дескрипторскиот систем е модел на некој физички систем, тогаш не можат да се појават конечни времиња на побег.

Забелешка 2. Нашите резултати би можеле да се дадат без Претпоставка 4.3, како во Теорема VIII од книгата (La Salle & Lefschetz, 1961), која што рестриктивно ги разгледува само ограничените решенија за $0 \leq t < \infty$.

Друга можност е да се намали множеството \mathbb{N} така што да претставува ограничено множество, како во Теоремата VI од книгата (La Salle & Lefschetz, 1961).

Трета можност е да се разгледува само својството на локална стабилност, т.е., сите точки x_0 во некоја околина на еквилибриумот (нултата точка) кои задоволуваат $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$ кога $t \rightarrow \infty$.

Теорема 4.1: При Претпоставките 4.1, 4.2 и 4.3, ако постои функција $v(x_1)$ таква што:

$$(i) \quad v(x_1) \geq 0 \text{ за сите } x_1 \in \mathbb{N}_1 \text{ и } v(0) = 0,$$

$$(ii) \quad \varphi(x_1, x_2) := \frac{\partial v}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \dot{v} \leq 0 \text{ за сите } x \in \mathbb{N} \text{ кои задоволуваат (4.2),}$$

(iii) Решението $x(t)$ на дескрипторскиот систем зададено со:

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2), \quad h(x_1, x_2) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2) = 0 \quad (4.7)$$

Задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

тогаш решението $x(t)$ на дескрипторскиот систем зададен со (4.1) и (4.2) задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

Доказ. За некое $a \geq 0$, нека го дефинираме множеството на точки $\mathbb{E}_a = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq v(x_1) \leq a\}$. При условите (i) и (ii), множеството \mathbb{E}_a е инваријантно во однос на динамиката (4.1) и (4.2). Навистина, бидејќи $0 \leq v(x_1(t)) \leq v(x_{10}) \leq a$, имаме $0 \leq v(x_1(t)) \leq a$. Нека со \mathbb{M} го означиме множеството на точки $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi(x) = 0\}$. Според Теорема VI во (La Salle & Lefschetz, 1961), сите решенија $x(t)$, кои започнуваат со $x(0) = x_0 \in \mathbb{N}$ мора да се стремат кон најголемото инваријантно множество содржано во \mathbb{M} . ■

Забелешка 3. Дека отсуството на конечни времиња на побег е неопходно, може да се види од Пример 1.1 (Sussmann & Kokotovic, 1991), т.е.,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}(1+z)x^3, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -2az - a^2y,$$

за некој реален број $a > 0$. (Алгебарските идентитети (4.2) не постојат.) Почетни услови се $x(0) = x_0$, $y(0) = 1$ и $z(0) = 0$. Аналитичкото решение за $x(t)$ задоволува

$$x(t)^2 = \frac{x_0^2}{1 + x_0^2 [t + (1+at)e^{-at} - 1]},$$

според тоа, ако $x_0^2 > 1$, тогаш се појавува конечно време на побег за доволно големо a . (Ова појавување е наречено “peaking phenomenon“ во (Sussmann & Kokotovic, 1991).)

Од друга страна, условите (i), (ii) и (iii) од Теорема 4.1 се задоволени со:

$$v = [y \quad z] \begin{bmatrix} \frac{5}{4a} + \frac{a}{4} & \frac{1}{2a^2} \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{4a^3} + \frac{1}{4a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Навистина, имаме $\nu > 0$, за сите $[y, z] \neq 0$, и

$$\dot{\nu} = -[y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} < 0, \text{ за сите } [y, z] \neq 0.$$

Условот $\dot{\nu} = 0$ повлекува да $y = 0, z = 0$ и $\dot{x} = -\frac{1}{2}x^3$, чиешто решение задоволува $x(t) \rightarrow 0$ кога $t \rightarrow \infty$.

Пример 4.1. Во истражувачкиот труд (Takaba, Morihira, & Katayama, 1995), следниот резултат се докажува како Теорема 1. Имено, нека го претпоставиме регуларниот дескрипторски систем

$$E\dot{x} = Ax, \quad (4.8)$$

и дека постои решение P на следните равенки

$$E^T P = P^T E, \quad (4.9)$$

$$A^T P + P^T A + C^T C = 0, \quad (4.10)$$

за некоја матрица C . Се докажува во (Takaba, Morihira, & Katayama, 1995), дека ако парот $(A - sE, C)$ е импулсно контролабилен, и детектабилен по конечните полови (finite mode detectable), и ако важи $E^T P = P^T E \geq 0$, тогаш дескрипторскиот систем (4.8) е асимптотски стабилен и без импулси.

Понатаму ќе ја докажеме Теоремата 1 во (Takaba, Morihira, & Katayama, 1994) со примена на нашата Теорема 4.1.

За оваа намена, нека $f(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ се претставени со линеарните зависности

$f(x_1, x_2) = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$ и $h(x_1, x_2) = A_{21}x_1 + A_{22}x_2$, за некои матрици A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22} . Понатаму, ги употребуваме следните ознаки:

$$E = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Отсуството на импулси на дескрипторскиот систем (4.8) е еквивалентно со несингуларноста на матрицата A_{22} (да се види (Ishihara & Terra, 2001)).

Понатаму, нека земеме $v(x_1) = x^T E^T P x \geq 0$, каде матрицата P ги задоволува равенките (4.9) и (4.10), како и неравенството $E^T P = P^T E \geq 0$. Тогаш $\varphi(x) = -x^T C^T C x \leq 0$, и условите (i) и (ii) на Теоремата 4.1 важат. За да докажеме дека условот (iii) исто така важи, нека го разгледаме дескрипторскиот систем (4.8) проширен со $\varphi(x) = 0$, што е еквивалентно со равенката $Cx = 0$. Бидејќи парот $(A - sE, C)$ е детектабилен по конечните полови (finite mode detectable), според Теоремат 4.1, имаме дека $x(t) \rightarrow 0$ кога $t \rightarrow \infty$.

Пример 4.2. Нека е зададен следниот нелинеарен автономен систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xy^2, \quad \dot{y} = e^z + z - 1, \\ e^z + z &= y + 1, \end{aligned} \quad (4.11)$$

со рамнотежна точка $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Ја земаме следната функција $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. Наоѓаме дека $\dot{v} = \varphi(x, y) = -x^2y^2$. Според ова, условите (i) и (ii) од Теорема 4.1 се задоволени. Но условот (iii) не е задоволен. Навистина, равенката на автономниот систем плус равенката $\varphi(x, y) = -x^2y^2 = 0$ имаат решение $x(t) = 0$ и $y(t) = e^t y_0$, такво што $y(t) \rightarrow \infty$ кога $t \rightarrow \infty$.

Лесно е да се провери дека вистинското решение на автономниот систем е

$$x(t) = e^{-0.5y_0^2(e^{2t}-1)}x_0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$y(t) = e^t y_0 \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty),$$

и $z(t)$ е дадено со имлицитната функција (4.11).

Пример 4.3. Ако го разгледаме дескрипторскиот систем зададен со

$$\dot{x} = -xz, \quad \dot{y} = z - y, \quad (4.12)$$

$$z^2 - x = 0, \quad (4.13)$$

од предходната равенка следи дека конзистентните почетни услови $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ и $z(0) = z_0$ мора да задоволуваат $z_0^2 - x_0 = 0$, и $x(t) \geq 0$, за сите t . Равенката (4.13) има две решенија: $z = -\sqrt{x}$ и $z = \sqrt{x}$. Ако го земеме првото решение, со решавање на диференцијалните равенки (4.12), добиваме

$$x(t) = \frac{1}{\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{z_0}\right)^2}, \quad z(t) = \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{z_0}}, \quad (4.14)$$

($y(t)$ не е прикажано), според тоа, се појавува конечно време на побег (при $t = -\frac{2}{z_0}$).

Во овој случај, земаме $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2$, каде $\mathbb{N}_1 = [0, \infty] \times [-\infty, \infty]$.

Ако го земеме решението $z = \sqrt{x}$, со решавање на диференцијалната равенка (4.12), го добиваме формално истото решение (4.14) за $x(t)$ и $z(t)$, но и

$$y(t) = e^{-t} y_0 + \int_0^t \frac{e^{s-t} ds}{\frac{s}{2} + \frac{1}{z_0}}. \quad (4.15)$$

Според овој израз, не се појавува конечно време на побег. Во овој случај, земаме $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2$, каде \mathbb{N}_1 е исто, и $\mathbb{N}_2 = [0, \infty]$.

Понатаму, ја применуваме Теорема 4.1 на случајот $\mathbb{N}_2 = [0, \infty]$. Земаме $\mathbf{v}(x) = \frac{1}{2} x^2 \geq 0$.

Тогаш $\dot{\mathbf{v}} = -z^5 \leq 0$ во \mathbb{N} . Равенката $\dot{\mathbf{v}} = 0$ повлекува дека $z = 0$ и, според (4.13), $x = 0$, додека решението на десната равенка во (4.12) е $y = e^{-t} y_0$. Последното решение $(x, y, z) = (0, e^{-t} y_0, 0)$ го задоволува условот (iii) од Теорема 4.1, што имплицира дека решението (4.12) и (4.13) се стреми кон нулата кога $t \rightarrow \infty$ за сите почетни услови, што е видно од (4.14) и (4.15) (Својството $y(\infty) = 0$ може да се провери со примена на Лопиталовото (l'Hopital) правило на идентитетот (4.15)).

Важноста на Теорема 4.1 е тоа што се додаваат други равенки кон равенките (4.1) и (4.2), имено равенката $\varphi(x) = 0$. Новото множество равенки е пре-детерминирано (over-determined), и, како резултат на тоа, можат да се генерираат други алгебарски равенки, коишто заедно со алгебарските равенки $\mathbf{h}(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$, можат да имплицираат дека

$x(t) = 0$ единствено решение на новото множество од равенки. Тогаш Теоремата 4.1 е задоволена тривијално. Наредната последица ја илустрира оваа идеја.

Последица 1: Нека е зададен дескрипторскиот систем (4.1) и (4.2) за којшто важат Претпоставките 4.1, 4.2 и 4.3, и нека постои функција $v(x_1)$ којашто ги задоволува условите (i) и (ii) од Теорема 4.1. Ако системот од алгебарски равенки $h(x) = 0$, $\dot{v} = 0$, $\ddot{v} = 0, \dots$ има единствено решение $x = 0$, тогаш решението $x(t)$ на дескрипторскиот систем зададен со (4.1) и (4.2) задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

Доказ. Доволно е да докажеме само дека изразот $\ddot{v} = 0, \dots$ претставува всушност алгебарски равенки по x . Нека го земеме проширеното множество равенки зададено со (4.1), (4.2) и $\dot{v} = \varphi(x) = 0$. Со диференцирање на последнава равенка по променливата t , ја добиваме равенката $\ddot{v} = 0$. За да го најдеме \ddot{v} , како функција од x_1 и x_2 , запишуваме најпрво:

$$\ddot{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \dot{x}_2, \quad (4.16)$$

Бидејќи \dot{x}_2 не е познато, ја диференцираме равенката $h(x) = 0$ по променливата t , и добиваме

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 0,$$

од каде, со употреба на Тврдењето 1, добиваме

$$\dot{x}_2 = - \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_1} \dot{x}_1.$$

Со замена на овој идентитет во идентитетот (4.16), добиваме

$$\ddot{v} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right] \dot{x}_1 = 0.$$

Изводите од повисок ред на v , како функции од x_1 и x_2 можат аналогно да се најдат. ■

Забелешка 4. Ако со (4.1) и (4.2) е зададен линеарен дескрипторски систем (4.8), тогаш Последицата 1 кореспондира на случајот кога парот $(A - sE, C)$ е обсервабилен по конечни полови (finite mode observable), наместо детектабилен по конечни полови (finite mode detectable).

Во следната последица, претпоставуваме дека векторите h и x_2 во системот (4.1) и (4.2) не фигурираат, т.е., го разгледуваме следниот автономен систем

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (4.17)$$

кој задоволува $f(0) = 0$ и ги има парцијалните изводи од сите редови.

Поимот локално слабо обсервабилен (locally weakly observable) систем е дефиниран на страна 733 во (Hermann & Krener, 1977), а во Теоремата 3.1 од тој труд се даваат потребни и доволни услови. Понатаму ние ќе ги адаптираме тие резултати на поедноставниот (без управување) систем (4.17) со излез $y = \varphi(x)$. Операторот L_f е дефиниран на скаларни функции $\varphi(x)$ со: $L_f(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f$. Нека ги разгледуваме сите можни скаларни функции $L_f(\cdots L_f(\cdots L_f(\varphi) \cdots) \cdots) =: L_f^k(\varphi)$, каде k е бројот на појавување на симболот f . Според Теорема 3.1 од (Hermann & Krener, 1977), системот е локално слабо обсервабилен во некоја точка $x \in \mathbb{N}$ ако и само ако векторите-редици

$$\frac{\partial}{\partial x} L_f^k(\varphi), \quad k = 0, 1, \dots$$

имаат ранг еднаков на n во точката x . Овој услов е поврзан со условот (iii) од следната последица.

Последица 2: Нека е зададен автономниот систем (4.17), кој што има единствено решение без конечни времиња на побег за сите почетни вредности $x_0 \in \mathbb{N}$, и нека постои функција $v(x)$ која што ги задоволува условите

- (i) $v(x) \geq 0$ за сите $x \in \mathbb{N}$, и $v(0) = 0$,
- (ii) $\varphi(x) := \frac{\partial v}{\partial x} f(x) = \dot{v} \leq 0$ за сите $x \in \mathbb{N}$,
- (iii) Единствено решение на системот од сите алгебарски равенки $L_f^k(\varphi), k = 0, 1, \dots$ е $x = 0$.

Тогаш решението $x(t)$ на системот (4.17) задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

Доказ. Директно следи од Последица 1. ■

В. Стабилизабилност со повратна спрега на нелинеарните дескрипторски системи

Нека го разледуваме следниот нелинеарен дескрипторски систем, којшто е афин-по-управувањето (affine-in-control):

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2) + G(x_1, x_2)u, \quad (4.18)$$

$$0 = h(x_1, x_2) + E(x_1, x_2)u \quad (4.19)$$

каде $x_1 \in \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$,

$G = [g_1, \dots, g_m]$, $E = [e_1, \dots, e_m]$ и u_1, \dots, u_m се скалари и g_1, \dots, g_m , e_1, \dots, e_m се вектор-колони.

Теорема 4.2: Нека постои функција $v(x_1)$ таква што

- (i) $v(x_1) \geq 0$ за сите $x_1 \in \mathbb{N}_1$, и $v(0) = 0$,
- (ii) $\varphi(x_1, x_2) := \frac{\partial v}{\partial x_1} f(x_1, x_2) \leq 0$ за сите $x \in \mathbb{N}$ кои задоволуваат (4.2).

Нека ја воведеме функцијата, која е вектор-редица, $\psi(x_1, x_2)$ со

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{\partial v}{\partial x_1} G(x_1, x_2).$$

Го применуваме управувањето

$$u = u(x_1, x_2) = -Q(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2)^T, \quad (4.20)$$

каде $Q(x_1, x_2)$ е произволна симетрично позитивно-дефинитна матрична функција дефинирана на \mathbb{N} .

(iii) Решението $x(t)$ на дескрипторскиот систем зададен со

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \quad (4.21)$$

$$\left. \begin{aligned} h(x_1, x_2) &= 0, \\ \varphi(x_1, x_2) &= 0, \\ \psi(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ за сите почетни услови $x(0) = x_0$,

Тогаш, при Претпоставките 4.1, 4.2, 4.3, адаптирани за дескрипторскиот систем со повратна спрега зададен со (4.18) (4.19) и (4.20), решението $x(t)$ на дескрипторскиот систем со повратна спрега задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

Доказ. Теоремата е последица на Теорема 4.1. Навистина, имајќи го предвид неравенството

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1} f + \frac{\partial v}{\partial x_1} G u = \frac{\partial v}{\partial x_1} f - \frac{\partial v}{\partial x_1} G Q \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} G \right)^T \leq 0,$$

со дедукција заклучуваме дека идентитетот $\dot{v} = 0$ е еквивалентен со множеството на идентитети

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} f = 0 \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x_1} g_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.23)$$

и како последица, $\psi(x_1, x_2) = 0$, вдоль траекториите на системот затворен со повратна врска. ■

Забелешка 5. Матрицата $Q(x_1, x_2)$ е воведена за да овозможи добивање на погодно балансирање помеѓу двете спротивни задачи:

- (i) Редуцирање на магнитудата на управувањето, и
- (ii) Добивање на прифатливо растојание до нестабилност (distance to instability) на системот затворен со повратна врска.

(којшто поим не е дефиниран на ригорозен начин во тезата).

Но за стабилен линеарен систем $\dot{x} = Ax$, растојанието до нестабилност е најкраткото растојание до имагинарната оска од сите карактеристични вредности на матрицата A .

Како и во Последиците 1 и 2, ќе најдеме доволни услови такви што Условот (iii) важи, без интегрирање на нелинеарни диференцијални равенки и без решавање на нелинеарни алгебарски системи равенки.

Ги воведуваме заградите на Јакоби (Jacobi brackets) $[f, g_i]$ помеѓу векторските функции f и g_i со:

$$[f, g_i] = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} f - \frac{\partial f}{\partial x_1} g_i,$$

и ги дефинираме индуктивно следните оператори:

$$\text{ad}_f^0 g_i = g_i, \quad \text{ad}_f^{k+1} g_i = [f, \text{ad}_f^k g_i], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ја користиме ознаката $\mathcal{L}_{x_1, x_2}(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ за множеството од векторски функции f и $\text{ad}_f^k g_i$, $i = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots$

Последица 3: Нека постои функција $v(x_1)$ таква што

- i) $v(x_1) \geq 0$ за сите $x_1 \in \mathbb{N}_1$, $v(0) = 0$,
- ii) $\varphi(x_1, x_2) := \frac{\partial v}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 0$ за сите $x \in \mathbb{N}$ кои задоволуваат (4.2).
- iii) $\text{rank}(\mathcal{L}_{x_1, x_2}(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)) = n_1$, за сите ненулти $x \in \mathbb{N}$ кои задоволуваат (4.22),
- iv) алгебарските равенки зададени со $\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0$ и (4.22) имаат единствено решение $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Со примена на управувањето (4.20), при Претпоставките 4.1, 4.2 и 4.3, адаптирани за дескрипторскиот систем со повратна врска зададен со (4.18), (4.19) и (4.20), решението $x(t)$ на дескрипторскиот систем со повратна врска задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

Доказ. Последица на идентитетите (4.23) и $\dot{x}_1 = f(x_1, x_2)$ е следниот идентитет

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v(x_1(t))}{\partial x_1} g_i(x_1(t), x_2(t)) \right) = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} f + g_i^T \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} f$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \left([\mathbf{f}, \mathbf{g}_i] + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \mathbf{g}_i \right) + \mathbf{f}^\top \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_1^2} \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} [\mathbf{f}, \mathbf{g}_i] + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} + \mathbf{f}^\top \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_1^2} \right) \mathbf{g}_i \\
&= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} [\mathbf{f}, \mathbf{g}_i] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \mathbf{f} \right) \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} [\mathbf{f}, \mathbf{g}_i]
\end{aligned}$$

каде е употребено што својството дека матрицата $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_1^2}$ е симетрична, кое е последица на еднаквоста на мешаните парцијални изводи од втор ред.

Индуктивно, го добиваме идентитетот $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \text{ad}_f^k \mathbf{g}_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots$.

Потоа, според условот (iii) од Последицата 3 и според $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \mathcal{L}_{x_1, x_2}(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) = 0$,

добиваме $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = 0$, за сите $x \in \mathbb{N}$ со исклучок на $x = 0$. Според условот (iv), имаме $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. ■

Во следната последица, претпоставуваме дека равенката (4.19) не постои (и следователно, векторот x_2 не постои), т.е., го разгледуваме следниот систем

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{G}(x)u, \quad x \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.24)$$

кој што задоволува $\mathbf{f}(0) = 0$, и притоа претпоставуваме дека функциите \mathbf{f} и \mathbf{G} ги имаат парцијалните изводи од сите редови. Во тој случај, дефиницијата на множеството $\mathcal{L}_x(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ е очигледна. Според Теорема 2.2 во (Hermann & Krener, 1977), ако рангот на $\mathcal{L}_x(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ е полн во точката x (еднаков на n), тогаш системот (4.24) е локално слабо контролирабилен во x .

Последица 4: Ако постои функција $v(x)$ таква што

(i) $v(x) \geq 0$ за сите $x \in \mathbb{N}$, и $v(0) = 0$,

(ii) $\varphi(x) := \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{f}(x) \leq 0$ за сите $x \in \mathbb{N}$.

(iii) $\text{rank}(\mathcal{L}_x(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)) = n$ за сите ненулни $x \in \mathbb{N}$ коишто задоволуваат $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$,

(iv) Единствено решение на алгебарските равенки зададени со $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$, е $x = 0$.

Го применуваме следниот закон за управување:

$$u(x) = -Q(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} G \right)^T, \quad (4.25)$$

каде $Q(x)$ е произволна симетрична позитивно дефинитна матрична функција од \mathbb{N} . Ако системот со повратна врска (4.24) и (4.25) има единствено решение без конечни времиња на побег, тогаш решението $x(t)$ на системот со повратна врска задоволува $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ за сите почетни услови $x(0) = x_0$.

Доказ. Директно следи од Последица 3. ■

Апликација на елаборираниот теоретски придонес во оваа глава ќе биде имплементирана во стабилизација на квадрокоптер, во Глава 7.

Глава 5

Моделирање на квадрокоптер и дизајн на контролер на летот

5.1. Вовед

5.1.1. Историја на AV системите

Познат факт од историјата, науката и уметноста, е дека Леонардо да Винчи е првиот кој ги даде зачетоците на многу дизајни за летачки машини и механизми, пишувајќи за нив, вклучувајќи ги орнитоптерите, едрилиците со фиксни крила, и падобраните. Почнувајќи од 17 Декември 1903 година, кога браќата Рајт го измислиле и го изградиле првиот успешен авион во светот и го направиле првиот управуван, задвижуван со мотор, и одржливо “потешко-од-воздухот“ летало за луѓе, во следните сто години се појавија многу видови на авиони. Сепак, не многу луѓе се обиделе да пилотираат и да уживаат во летањето. Пилотирањето на авионите беше сеуште мистериозно, сè додека малите и микро-мултикоптери не се приближија кон потрошувачите преку пазарот на играчки со вградено радио- управување (RC) (Quan, 2017).

Воглавно, AV системите биле употребувани подолго време како примарни и вообичаени методи за транспорт во најкратко време на големи растојанија. Најголем напредок на AV системите е направен за време на Првата и Втората Светска Војна, во воените бази.

Денес, напредокот во технологијата, вградените системи и специјално, развојот на вештачка интелигенција, поттикнатите интереси за истражувања за воени цели за проширување на истражувања од конвенционалните возила кон конвенционалните и неконвенционални возила без човечка посада, како UGV (Unmanned Ground Vehicles), UAV (Unmanned Aerial Vehicles), UUV (Unmanned Underwater Vehicles), да се види (Bi, et al., 2017), (Phang, Lai, Wang, Lan, & Chen, 2014), (Phang, Li, Yu, Chen, & Lee, 2014), (Zhang, Xian, Zhao, & Zhang, 2015), (Bunjaku, Stefanovski, & Stankovski, 2017), (Wang, Ke, & Chen, 2016)).

Фокусот на оваа глава ќе биде само на динамичкото моделирање и дизајн на управувачки систем за Мултикоптер-леталото, што лесно може да се прошири на UAV системи. Леталото без посада (unmanned aerial vehicle) (UAV или дрон) е летало коешто е опремено со неопходни единици за процесирање на податоци, сензори, автоматско управување, и системи за комуникација, и коешто е способно да изведе мисија на автономен лет без помош на човечки пилот (Cai, Chen, & Lee, 2011).

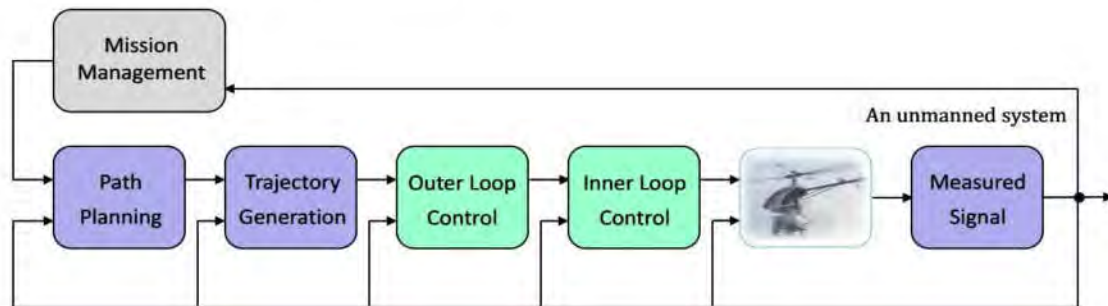
5.1.2 Важност на of AV системите

Во споредба со земните возила, можноста и маневарската способност на ротор-крафтите ги прави нив идеални за истражување и мисии на мониторирање. Но заради тоа, ротор-крафтите се употребуваат и за испорака на различни товари во три-димензионално (3D) опкружување.

Мултикоптерите се познати како холономни системи, бидејќи тие имаат ограничувања на движењето, но се способни да се движат во сите правци. Затоа, мултикоптерите се многу применливи, а посебно заради способноста на вертикално полетување и слетување.

UGV системите имаат предности, заради потребата од примена на обединување на сензори и потрошувачката на енергија за обезбедување на стабилност при лебдење и останување во истата позиција. Тие се способни да носат тешки товари. UGV системите, во зависност од нивната конфигурација, се карактеризираат како не-холономни системи (системи кои немаат способност да се движат во правец на нормалата на оската на вртење). Овие системи полесно се снаоѓаат во ситуации кога се појавуваат скалила или кога треба да се избегнат пречки во динамичко опкружување.

Мултикоптерите имаат примени во различни сектори, како на пример при мониторирање во ризични средини и сообраќај, и непогодни временски услови. Покрај примарната примена за видео-запис и фотографирање, во скоро време дроновите наоѓаат примена при градење мостови, и инспекција на електрични далноводи. Воздушните мултикоптери немаат потреба од пилот. Заради тоа, можно е истите да се конструираат помали, полесни, побезбедни и поефтини.



Слика 8. Општата шема на UAV систем, (Cai, Chen, & Lee, 2011)

5.1.3 Класификација на UAV системите

Во зависност од апликациите и мисиите кои треба да ги вршат, UAV системите, според (Cai, Chen, & Lee, 2011), се класифицираат во следните четири глобални категории:

1. Со фиксни крила
2. Со придвижувани крила
3. Рото-крафти
4. Хибридни системи.

Уште од првиот успешен лет, системите со фиксни крила се најраспространетата категорија и најмногу се користат. Главната карактеристика на леталата со фиксни крила е способноста да носат тежок товар и ефикасноста во потрошувачката на енергија во споредба со изминатото растојание. Постојат два главни недостатоци на леталата со фиксни крила: првиот е условот да се постигне одредена брзина за да се полета, и вториот е условот за постоење на поле на слетување со голема должина.

Дури и покрај фактот дека леталата со придвижувани крила се наведени како втора категорија, од гледна точка на апликацијата, тие е едни од најново применетите, поради комплексноста на нивните динамички системи. Неодамна, многу истражувачки институти почнаа да работат со летала со придвижувани крила, користејќи имитирање на птиците кога летаат. Нивната предност е убавината на природниот лет на птиците и ефикасноста на долготрајното летање. Постојат неколку реални апликации за прикажување на вертикално слетување или лебдење (слично на колибри) на системот со придвижувани крила. Оваа категорија се уште е на ниво на истражување, не поради ограничувањата во електрониката, туку поради тешкотиите од механичките аспекти.

Врз основа на неговата примена, категоријата на роторкрафт е втора водечка категорија. Еден од најдолготрајните припадници на таа категорија е хеликоптерот, поради големата носивост и можноста за вертикално полетување и слетување, кои се најповолните аспекти на мултикоптерите. Во последната деценија, мултикоптерите станаа многу привлечни поради напредокот на технологијата и можноста за намалување на нивната механичка големина (види (Bouabdallah, Noth, & Siegwart, 2004), (Goel, Shah, Gupta, & Ananthkrishnan, 2009), (Hamel, Mahony, Lozano, & Ostrowski, 2002), (Phang, Lai, Wang, Lan, & Chen, UAV calligraphy, 2014), (Phang, Li, Yu, Chen, & Lee, 2014)).

Како резултат на тоа, се намали цената за комерцијални апликации. На пример, квадрокоптерот е еден од најраспространетите роторкрафти во комерцијални апликации, поради неговата способност да се движи во сите правци. Главниот недостаток на мултикоптерите е неефикасноста во потрошувачката на енергија.

Издржливоста на енергијата за време на долги летови и енергетската ефикасност на леталата со фиксните крила не можеше да биде надмината од категоријата на мултикоптери, ниту од другите категории. Мултикоптерите наоѓаат примена во многу сектори, како што се следење во опасни средини, сообраќајот, времето, мониторингот на цевководи, пожарничарски апликации, полициска истрага, итна помош и спасување, итн. Покрај големите апликации за снимање на видео и фотографирање, неодамна беа употребени беспилотни летала за изградба на мостови, инспекција на електрични далноводи и Слика Бидејќи воздушните мултикоптерски системи не бараат пилот, можно е да се направат помали, полесни, побезбедни и поевтини. Неодамна се појавија и неколку мултикоптерски апликации за транспорт на дневен печат, но таквите системи не се доволно сигурни и се уште се предмет на тековни истражувања. Дизајнот на стратегии за управување на квадрокоптерите е атрактивно поле за многу истражувачи и предложени се многу управувачки алгоритми.

Четвртата и последната категорија се хибридни системи, кои претставуваат комбинација помеѓу леталата со фиксни крила и мултикоптерите. Главната примена на ваквите системи е главно во воените бази. Неодамна се презентирани некои прототипови на автомобил за апликација, коишто се на комерцијална база. Возможните идни летачки автомобили ќе бидат во оваа категорија.

5.1.1.4 Системи за локализација и навигација

UAV системите се потпираат на многу фактори, на пример, типот на сензори што се користат за собирање информации од реалниот свет. Тие исто така зависат од физичката конструкција и управувачот што се користи за да се обезбеди лебдење, сигурно движење и следење на траекторијата.

Во зависност од апликацијата, UAV системите се поделени во две главни категории: Внатрешни и надворешни. Врз основа на категориите споменати во (Cai, Chen, & Lee, 2011), UAV системите за употреба во затворен простор можат да функционираат во средина каде што не постои GPS. Постојат многу истражувачки трудови направени за навигација во таква средина ((Phang, Lai, Wang, Lan, & Chen, 2014), (Zhang, Xian, Zhao, & Zhang, 2015)). Повеќето истражувачки трудови се базираат на обединувачки (fusion) сензори, како Камера, Lidar (Ласерски радар), Ласерски покажувач итн. Денес, за точна локализација во затворен простор се користат Опти-тракери и Системи за детекција на движење - Motion capture system (ViCon). Вториов систем има точност до 0,1 мм.



Слика 9. Соба за тестирање на летање во затворен простор со ViCon

5.2 Дизајн и развој на квадатор

Процесот на дизајнирање и развој на AV систем бара користење на извесни фази од идејата кон крајниот концепт за тестирање. Во почетокот, многу е важно да се направи листа на барања кои AV системот треба да ги исполни, како што се намената на апликацијата, животната средина, нивото на мисијата и важноста на примената, носивоста, физичките ограничувања и други ограничувања итн. Доколку системот е потребен за исполнување на некои критични мисии, на пример примена во ризична средина, тогаш: точноста, сигурноста и издржливоста во текот на летот се клучните точки кои треба да се земат предвид со внимателност.

5.2.1 Хардверски дизајн

Следува листа на слики на потребните хардверски делови за изградба на летало-квадрокоптерски систем:



Рамка од карбонски фибер



Батерија



Електронско управување на брзина, ESC
(Electronic Speed Control)



Мотори



Пропелери



Автопилот pixhawk (flight controller) GPS Приемник

Радио телеметрија



Радио-преносен контролер

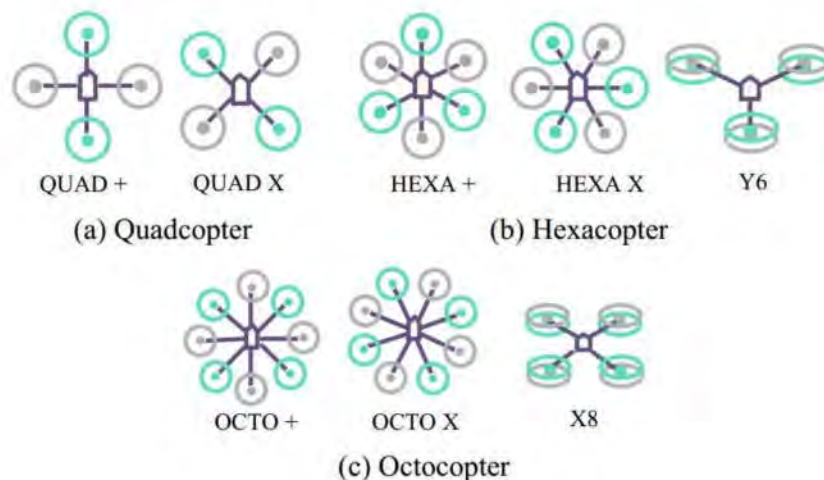
RC приемник

Земно управување

Слика 10. Основни компоненти за изградба на летало-квадаторски систем

5.2.2 Избор на рамка за мултикоптер

Во зависност од намената на мултикоптерската апликација и во зависност од бројот на мотори што се користат, рамките можат да се издвојат во три категории: Квадкоптер (4 пропелери), Хексакоптер (6 пропелери) и Октокоптер (8 пропелери).



Слика 11. Конфигурација на UAV

Во оваа теза се обработува квадкоптер со рамка на “плус“ конфигурација.

5.2.3 Параметри на моторите

За изградба на квадатор се користат моторите и пропелерите доставени од производителот, Tiger Air T350 (T-2213 920KV, Air 20H, со пропелер 9,5x4,5 инчи) Пред самата конструкцијата на мултиротор, неопходно е да се избере соодветна големина на моторите и пропелерите. Обично, моторите имаат број зададен со параметар на суфиксот KV, што значи да се определи зголемувањето на број на вртежи за секој додатен 1 волт. На пример, 1000KV значи дека брзината на моторот без оптоварување ќе се зголеми за 1000RPM кога доведениот напон се зголеми за 1V. Моторите со помал KV може да произведат поголеми вртежи и да носат поголеми пропелери.

5.2.4 Динамички модел на квадатор

Моделирањето е од суштинско значење за инженерството; тоа е процес на пишување математички равенки врз основа на законите на физиката за опишување на физичкиот систем. Тоа често вклучува значително итеративно поедноставување на моделот, за подобро поставување на податоците од мерењето. Точноста на дизајнираниот

математички модел е најважен за процесот на моделирање на физички систем. Јасно е наведено во следниот цитат:

"Бидете сигурни да напишете точна физика, бидејќи остатокот е математиката" од Р. Калман.

Всушност, поради високата цена на градењето и тестирањето на реално летало, важноста на математичките модели оди и подалеку од дизајнот. Математичкиот модел се користи, заедно со компјутерската симулација, за да се оцени ефикасноста на прототиповите на леталото и со тоа да се подобри дизајнот, (Stevens, Lewis, & Johnson, 2015).

5.2.4.1 Кинематика

Кинематиката е всушност анализа на движењето на некое тело без да ги земе предвид масата, силите и вртежните моменти (torques). Се занимава само со параметри како позицијата, брзина, положба (attitude) и аголната брзина. Според (Cai, Chen, & Lee, 2011) односот помеѓу координатен систем на телото што се движи и NWU (North West Up-координатен систем) врз основа на преносни и ротациони движења, е даден со следните равенки:

$$V_n = R_{n/b} \cdot V_b \quad (5.1)$$

$$\omega_n = S^{-1} \cdot \omega_b \quad (5.2)$$

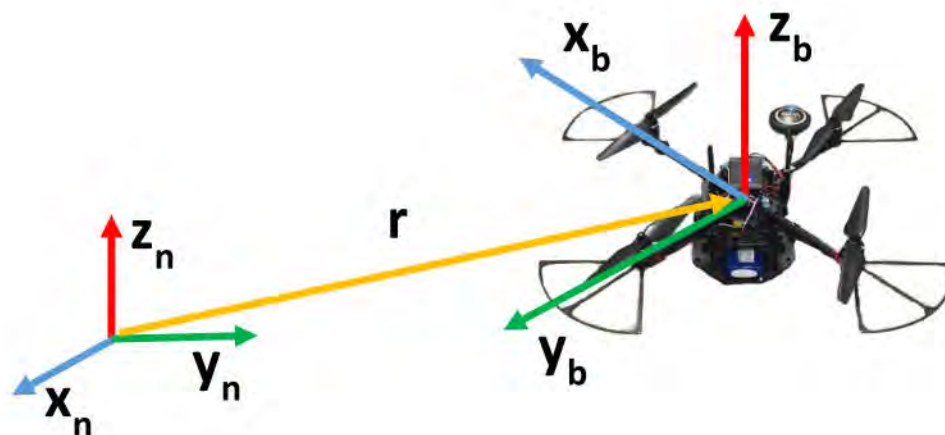
кадешто $R_{n/b}$ е ротациона матрица, S^{-1} е матрица на трансформација, додека V_b, V_n и ω_b, ω_n се линеарни и аголни брзини во однос на телото, односно во NWU координатниот систем, респективно. Ротационата матрица и матрицата на трансформација се дефинирани како што следува:

$$R_{n/b} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

кадешто $s_{(\cdot)}$, $c_{(\cdot)}$, $t_{(\cdot)}$ се скратени ознаки за тригонометриските функции \sin , \cos , и \tan .

Ротационата матрица $R_{n/b}$ има својство на ортогоналност, т.е., $R_{n/b}^{-1} = R_{n/b}^T$. Таквото својство е погодно за примената кај UAV системи, заради фактот што се редуцира моќноста на процесирање, т.е., нумеричките пресметки на матрична инверзија во секоја итерација.



Слика 12. Релативни координатни системи

5.2.4.2 6-DOF Динамички модел

Општо земено, постојат две методи кои се користат за моделирање:

1. Моделирање според прв принцип,
2. Моделирање со помош на податоци.

Овде ќе се фокусираме на првиот метод, со користење на Њутон-Ојлер формализам за да го опишеме транслационото и ротационото движење на динамиката на круто тело. Во нашата анализа, сметаме дека системот на UAV е масена точка, а нашата анализа се прави во координатите на рамката на леталото. Следните две динамички равенки ја земаат предвид масата на квадаторот m , и неговата инерцијална матрица, \mathbf{J} .

$$m\dot{\mathbf{V}}_n = \mathbf{F}_n \quad (5.5)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b) = \mathbf{M}_b \quad (5.6)$$

каде што е векторот V_n е линеарна брзина во земни координата и ω_b е аголен вектор на брзина во координати на рамката - телото, додека m и J се масата и моментот на инерција на квадкopterот, респективно. Од друга страна, F_n е вкупниот вектор на сила која дејствува на телото на квадаторот, претставен во земни координати, додека M_b е моментниот вектор кој дејствува на квадаторот и се изразува во координати на телото. Матрицата на моментот на инерција е дефинирана како дијагонална матрица врз основа на претпоставката / фактот дека телото на квадаторот е симетрично во x , y и z -оските, па затоа сите вкрстени елементи/членови се нула ($J_{ij} = 0 | i \neq j$).

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Два основни извори придонесуваат за силите и вртежните моменти на квадаторот. Првата е гравитационата компонента, а втората е збирот на сили и вртежен момент на секој мотор, наречен роторска компонента (види (Bouabdallah, Noth, & Siegwart, 2004), (Goel, Shah, Gupta, & Ananthkrishnan, 2009), (Hamel, Mahony, Lozano, & Ostrowski, 2002), (Phang, Li, Yu, Chen, & Lee, 2014)). Силите и моментните вектори може да се изразат на следниов начин:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} = \Gamma_g + \Gamma_{rotor} \quad (5.8)$$

5.2.4.3 Гравитациона компонента

Гравитационата сила F_g делува само на z -оската во NWU (North West Up) координатната рамка. Заради тоа, таа може да се претстави како:

$$F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Имајќи предвид дека гравитацијата делува само на векторот на сила и не делува на векторот на момент на рамката на телото, можеме да напишеме:

$$\Gamma_g = \begin{bmatrix} F_g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

5.2.4.4 Роторска компонента

Според (Cai, Chen, & Lee, 2011), (Quan, 2017), (Stevens, Lewis, & Johnson, 2015), секој мотор го создава својот потисок (thrust) T_i и вртежниот момент Q_i , $i=1,2,..4$. Со разгледување на аеродинамиката, потисокот и вртежниот момент на моторот, вклучувајќи го и пропелерот, се формулираат како:

$$T_i = C_t \rho S R^2 \Omega_i^2 \quad (5.11)$$

$$Q_i = C_q \rho S R^3 \Omega_i^2 \quad (5.12)$$

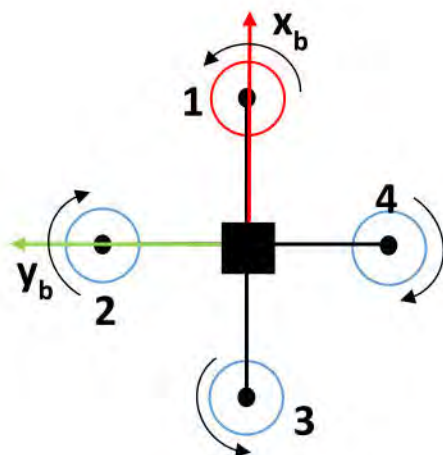
каде C_t и C_q се коефициенти на аеродинамиката на пропелерот, додека S е кружната површина која се опфаќа со пропелерот за време на вртењето, и R е радиусот на пропелерот, ρ е густина на воздухот и Ω е ротациона брзина на моторот.

Бидејќи пропелерите на квадрокоптерот имаат фиксен агол на наклон (pitch angle), можеме да сметаме дека сите параметри од равенките (1.11) и (1.12) се константи, освен Ω . Оттука, можеме да напишеме како следи:

$$T_i = \hat{C}_T \Omega_i^2 \quad (5.13)$$

$$Q_i = \hat{C}_Q \Omega_i^2 \quad (5.14)$$

каде \hat{C}_T и \hat{C}_Q се константи коишто можеме да ги означиме како коефициенти на потисок и вртежен момент, респективно. Овие два коефициенти можат да се определат експериментално.



Слика 13. Квадкоптер “Плус” рамка

Тоталниот потисок генериран од четирите мотори кои делуваат на квадкоптерот е:

$$f_{thz} = \sum_{n=1}^4 T_n = C_T \cdot (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \quad (5.15)$$

Врз база на Слика 13, моментите генерирани од пропелерите за рамка на “плус”-конфигурацијата се дефинирани како:

$$\begin{aligned} M_x &= dC_T (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ M_y &= dC_T (-\Omega_1^2 + \Omega_3^2) \\ M_z &= C_Q (-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Параметарот d го означува растојанието помеѓу центарот на гравитација CG (тежиштето) и роторските оски. Векторот на сила F_r се добива како сума од сите роторски потисоци и резултира со тотален потисок на кревање на телото на квадкоптерот во позитивна насока од z-оската, т.е.

$$F_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_T & C_T & C_T & C_T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Моментниот вектор M_r се добива како разлика помеѓу потисоците на роторите (агол на тркалање и агол на наклон - roll and pitch angle), и сумирање на тоталниот потисок на вртежниот момент на роторите (агол на свртување - yaw angle).

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & dC_T & 0 & -dC_T \\ -dC_T & 0 & dC_T & 0 \\ -C_Q & C_Q & -C_Q & C_Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Роторските компоненти се добиваат како што следи:

$$\mathbf{F}_{rotor} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{n/b} \cdot \mathbf{F}_r \\ \mathbf{M}_r \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Да се потсетиме на равенките на динамика на круто тело (5.5), (5.6). Со замена на гравитационата компонента од предходните поглавја и роторската компонента, се добива:

$$m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{thz} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}.$$

По поедноставувањето на равенката (5.20), се добива:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ c_\phi c_\theta \end{bmatrix} f_{thz}$$

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qr(J_{zz} - J_{yy}) \\ pr(J_{zz} - J_{xx}) \\ pq(J_{yy} - J_{xx}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Равенката (5.21) претставува 6-DOF нелинеарен динамички модел на квадатор со рамка на “плус“-конфигурација, каде $[f_z, m_x, m_y, m_z]^T$ се влезови во системот, кои заради поедноставување, ги означуваме со $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$.

5.2.4.5 Линеаризиран динамички модел

Бидејќи динамичкиот модел на квадкоптер е нелинеарен, неговото управување со линеарен контролер го прави системот неробустен, или системот е контролабилен но со многу мала брзина, што не е намера на ова моделирање. Сепак, заради симетричната структура на квадкоптерот, возможно е да се линеаризира динамичкиот модел на квадкоптерот во точката на лебдење.

Со линеаризирање во точката:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 0 \\ \theta &= 0 \\ \psi &= \psi_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

како резултат, добиваме

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= 0 \\ \dot{\theta} &= 0 \\ \dot{\psi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

За мали агли, можеме да апроксимираме:

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &\approx \phi \\ \sin \theta &\approx \theta \\ \cos \phi &\approx 1 \\ \cos \theta &\approx 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Со преуредување на равенката (5.2), добиваме

$$\omega_b = S \cdot \omega_n \quad (5.25)$$

и со замена на матрицата S, дефинирана како:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

добиваме:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Сека, доколку ги замениме равенките (5.22), (5.23), (5.24) во равенката (5.27), добиваме:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \theta\dot{\psi} \\ q &= \dot{\theta} - \phi\dot{\psi} \\ r &= \dot{\psi} - \phi\dot{\theta} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Познато е дека доколку два мали броеви се помножат меѓусебно, ќе се добие уште помал број, па така, можеме да ги апроксимираме $\theta\dot{\psi} \approx \phi\dot{\psi} \approx \phi\dot{\theta} \approx 0$, при што ќе добиеме:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} \\ q &= \dot{\theta} \\ r &= \dot{\psi} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Што се однесува на равенката (5.23), добиваме:

$$\left. \begin{aligned} p &= 0 \\ q &= 0 \\ r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Во режимот на лебдење, разбирливо е дека линеарната брзина $[u, v]^T$ во x и y координати, во однос на рамката на телото, мора да е нула, следствено:

$$\left. \begin{aligned} u &= \dot{u} = 0 \\ v &= \dot{v} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Конечно линеаризацијата на 6-DOF -динамичкиот модел на дронот може да се добие со употреба на равенките (5.22), (5.23), (5.24), (5.30) и (5.31) во нелинеарниот динамички модел (5.21), и земајќи дека $\sin\psi \approx 0$ и $f_{thz} \approx mg$, такашто линеаризираниот модел е како следи:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= g \begin{bmatrix} \theta \\ -\phi \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_{thz} \\ \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Целосниот линеаризиран динамички модел (5.32) од квадрокоптерот може да се претстави како еден систем во простор на состојби:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{x} + B \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = C \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

каде A , B , C се константни матрици и \mathbf{x}, \mathbf{u} се состојбен и управувачки вектор, експлицитно дефинирани како: $\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^T$ и $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T = [f_{thz}, m_x, m_y, m_z]^T$. Значи, експлицитниот систем (5.32) може да се претстави како:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_{zth} \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{I}_{12 \times 12} \cdot \mathbf{x}$$

За да се “сокрие“ членот g во (5.32), воведено е ново управување, со равенката:

$$\hat{f}_{thz} = \frac{1}{m} f_{thz} - g.$$

5.2.5. Параметарска идентификација

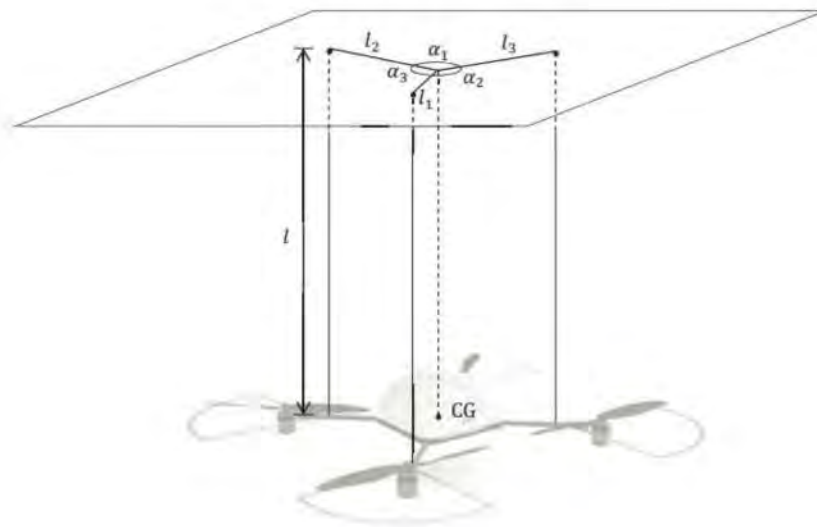
5.2.5.1 Инерцијален момент

Моментот на инерција на квадрокоптерот е величина која ја изразува тенденцијата на телото да се спротивстави на аголно то забрзување, кое е збир на производи од масата на

секоја честичка во телото со квадратот на неговото растојание од оската на ротација, (Quan, 2017) .

Моментот на инерција на квадкоптерот може да се мери со користење на трифиларно нишало, . Експерименталниот метод прикажан на Слика 7 покажува квадкоптер прикачен во три фиксни жили со иста должина l . Хоризонталните растојанија помеѓу CG оската и трите оски на жилите се означени со l_1, l_2, l_3 , додека аглиите помеѓу оските на жилите се означени со $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Квадкоптерот може да се задвижува со мал агол и притоа да се набљудува периодот на осцилација T_s . Во ова сценарио, моментот на инерција во оската z на телото на квадкоптерот се пресметува со:

$$J_{zz} = \frac{mgl_1l_2l_3T_s^2}{4\pi^2l} = \frac{l_1\sin\alpha_1 + l_2\sin\alpha_2 + l_3\sin\alpha_3}{l_2l_3\sin\alpha_1 + l_1l_3\sin\alpha_2 + l_1l_2\sin\alpha_3} \quad (5.35)$$



Слика 14. Трифиларно нишало

Со намерата да го пронајдеме моментот на инерција во x -оската (J_{xx}), телото на квадкоптерот треба да се ротира за 90 степени во аголот на наклон (pitch angle), а останатите процедури остануваат исти. Истите резултати ќе се добијат со користење на нумерички пресметки базирани на компјутерскиот софтвер Solidworks.

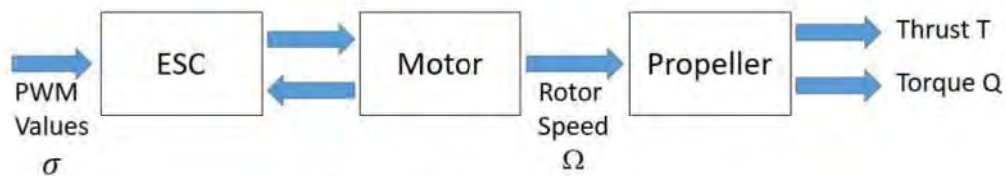
$$J_{xx} = 8.623 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2,$$

$$J_{yy} = 8.631 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2,$$

$$J_{zz} = 1.615 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2.$$

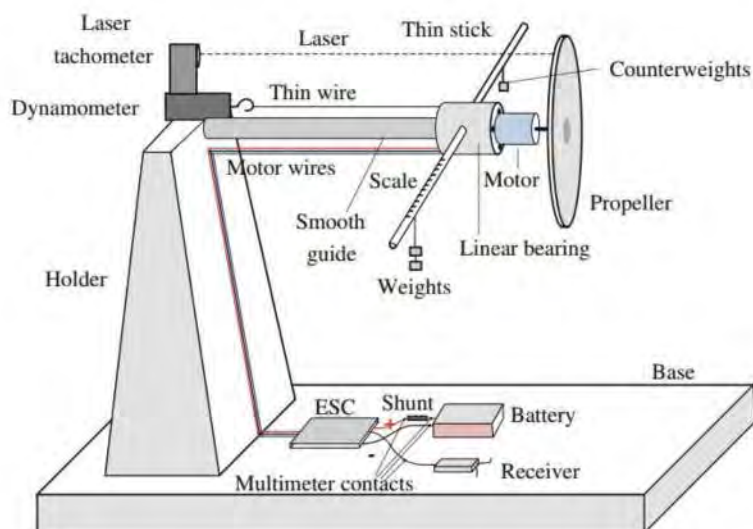
5.2.5.2 Идентификација на динамиката на моторите и пропелерите

Вообичаено е да техничките спецификации обезбедени од производителот на моторите, параметрите ESC итн. не се многу точни. Затоа, за да имаме прецизно моделирање на погонскиот систем, треба да направиме експериментални мерења со користење на уред за мерење на параметрите за погон, види слика 9.



Слика 15. Актуаторски систем

Системот за побуда (actuator system) на квадрокоптерот содржи ESC, мотор и пропелер, кои всушност се три независни подсистеми. Оттука, секој од овие подсистеми го вклучува својот сопствен модел. Затоа, со користење на динамометар, истовремено може да се најдат трите динамички подсистеми.



Слика 16. Уред за мерење на параметрите на погонот, (Quan, 2017).

Можно е со користење на уредот од Слика 16 за да се измери: аголната брзина на моторот Ω , потисокот T , вртежниот момент Q и временска константа на моторот τ_m . Како работи овој уред? Прво, за да го извршиме целото тестирање на систем и мотор, потребно е да имате доволно батерија за напојување. Батеријата е поврзана со ESC што раководи со пропелерот прикачен на моторот и може да се управува од приемникот кој обезбедува PWM сигнал σ . Командата за потисок зема вредност помеѓу 0 и 1, во овој случај, тоа е чекорен влез. Пред да се изврши експериментот, тенкиот стап треба да биде совршено усогласен, така што рамнотежата се постигнува помеѓу тежината и контра-тежината. Откако командата за потисок достигне висока вредност, приемникот го презема сигналот и доведува $\sigma = 1$ кон ESC. Моторот започнува да се забрзува додека не постигне стабилна брзина Ω_{ss} . Ласерскиот тахометар ја мери брзината на вртење Ω . Во овој момент, временската константа τ_m на моторот може да се процени со мерење на потребното време кое моторот го зема за да се забрза од $\Omega_0 = 0$ до $\Omega_\tau = 63\% \cdot \Omega_{ss}$. Кога моторот ќе почне да се забрзува, пропелерите почнуваат да ја генерираат силата на погонот и да ја истегнуваат тенката жица. Како што се истегнува тенката жица, го мериме потисокот T . Се знае дека кога моторот ротира во една насока, создава контра вртежен момент во спротивна насока на од насоката на вртење. Во таква ситуација влијае на рамнотежата на тежината и противтежата, а со тоа можеме да го измериме вртежниот момент Q .

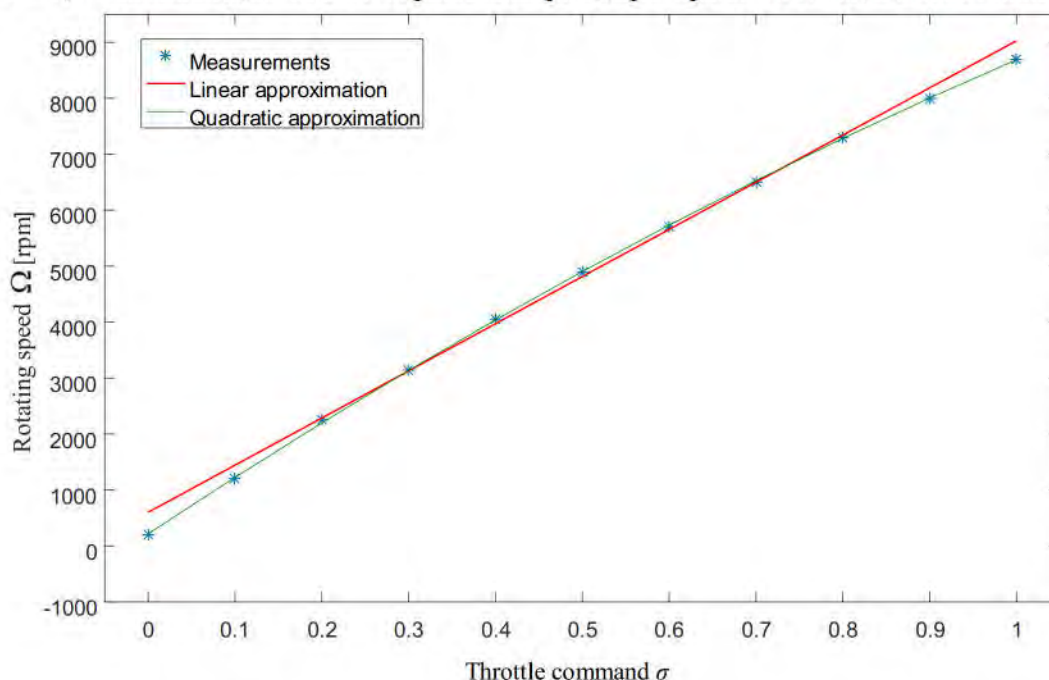
5.2.5.3 Експериментални мерења

Експерименталните мерења и анализата на динамиката на погонскиот систем се изведуваат во две одделни поглавја: прво во стационарна состојба и второ во динамичка анализа.

Анализа во стационарна состојба на Ω_{ss}

Односот помеѓу погонската команда σ и брзината на вртење Ω на моторот е претставен на Слика 17.

Погонската команда алтернативно би можела да се обработува во проценти, откога $\sigma = 1$, и тоа значи дека постои барање моторот да ротира со 100% од неговиот капацитет.



Слика 17. Брзина на вртење $[\Omega]$ во функција на погонската команда $[\sigma]$

Во зависност од типот на мотори што се користат, регионот од 0-15% од погонската команда се смета за мртва зона, а 85-100% се смета за зона на сатурација. Од друга страна, регионот над 40% се смета за регион на лебдење или ефективен регион на работа.

Потпирајќи се на експериментални мерења во анализа на стационарна брзина на нашиот

мотор, на Слика 10, заклучуваме дека регионот од 20-80% е линеарен регион. Оттука, користејќи ја алатката за линеарна апроксимација во Matlab, имаме:

$$\Omega_{ss} = (8.427\sigma + 0.253) \cdot 10^3 [rpm] \quad (5.36)$$

Алтернативно, за целосниот опсег на погонската команда, може да се применува апроксимацијата:

$$\Omega_{ss} = (-0.806\sigma^2 + 1.0279\sigma + 0.0215) \cdot 10^4 [rpm] \quad (5.37)$$

За симулациски потреби, понатаму ќе ја користиме равенката (5.36), но во единици $\left[\frac{rad}{s} \right]$

$$\Omega_{ss} = (876.4\sigma + 26.31) \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (5.38)$$

Динамичка анализа

Сметајќи дека електричната динамика на моторот е многу побрза од механичката динамика, а поради фактот што механичката динамика доминира во перформансите на системот, целата моторна динамика се претпоставува дека се однесува како систем од прв ред.

Помал момент на инерција на пропелерите може да ја подобри брзината на одзив на моторот, што е од суштинско значење за управувачкиот ефект и перформанси, (Quan, 2017).

Временската константа од 2213 920 KV мотор со пластичен пропелер со димензија 9,5 x 4,5 инчи е $\tau_m = 0.05s$.

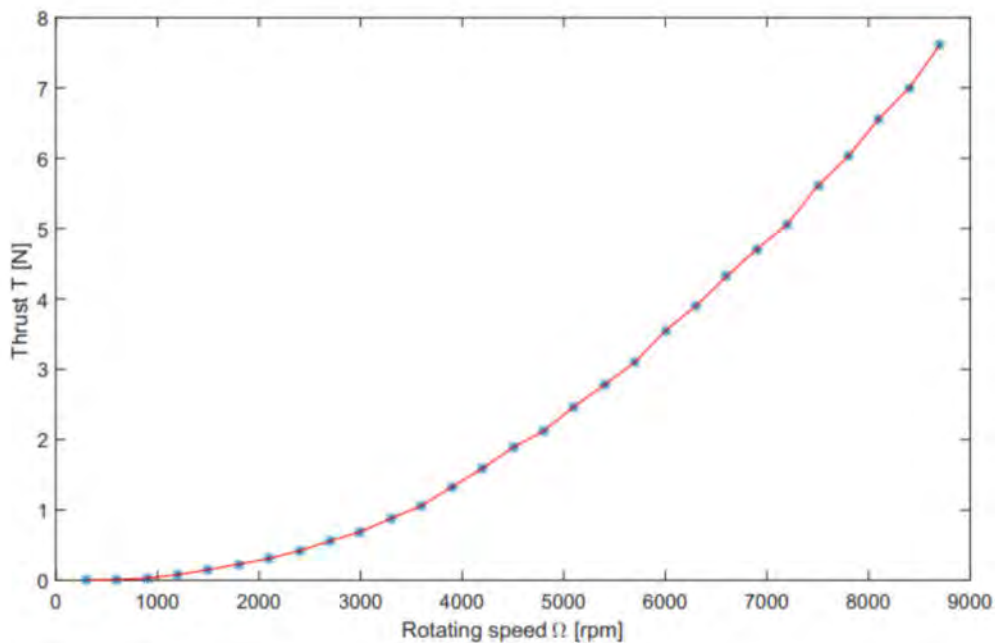
Ја усвојуваме во оваа теза следната динамика од прв ред на моторот:

$$\Omega(s) = \frac{1}{1 + \tau_m s} \Omega_{ss} \quad (5.39)$$

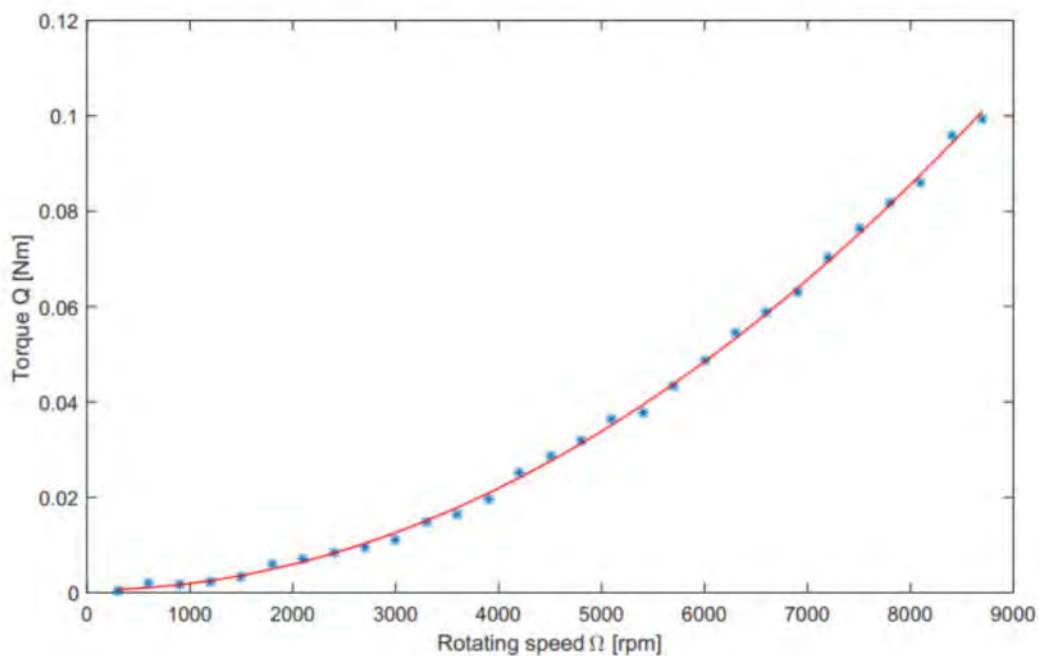
Така што, со вклучување на анализата на стационарен режим за линеарната апроксимација (5.36), целосната динамика на моторот се добива дека е:

$$\Omega(s) = \frac{1}{1 + 0.05s} (8.427\sigma + 0.602) \cdot 10^3 \quad (5.40)$$

Динамиката на побудниот систем (actuator system), со оглед на Слика Слика 15, ја вклучува исто така и динамиката на пропелерите. Затоа, зависноста помеѓу ротационата брзина и погонскиот систем за потисокот T и вртежниот момент Q е квадратна, да се види Слика 11 и Слика 12.



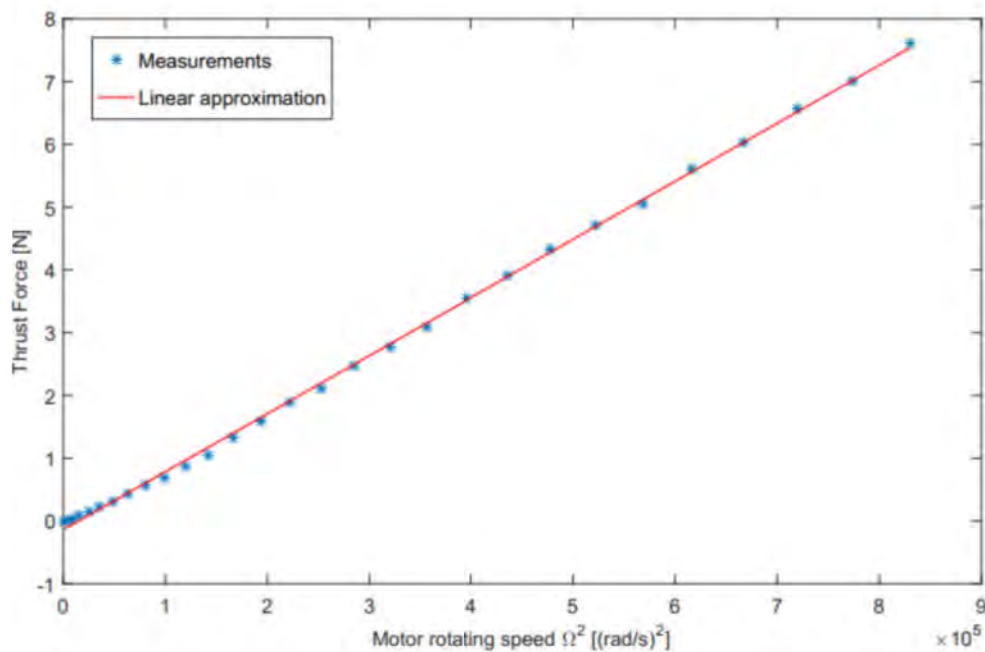
Слика 18. Потисок $[T]$ во функција од брзината на вртење $[\Omega]$



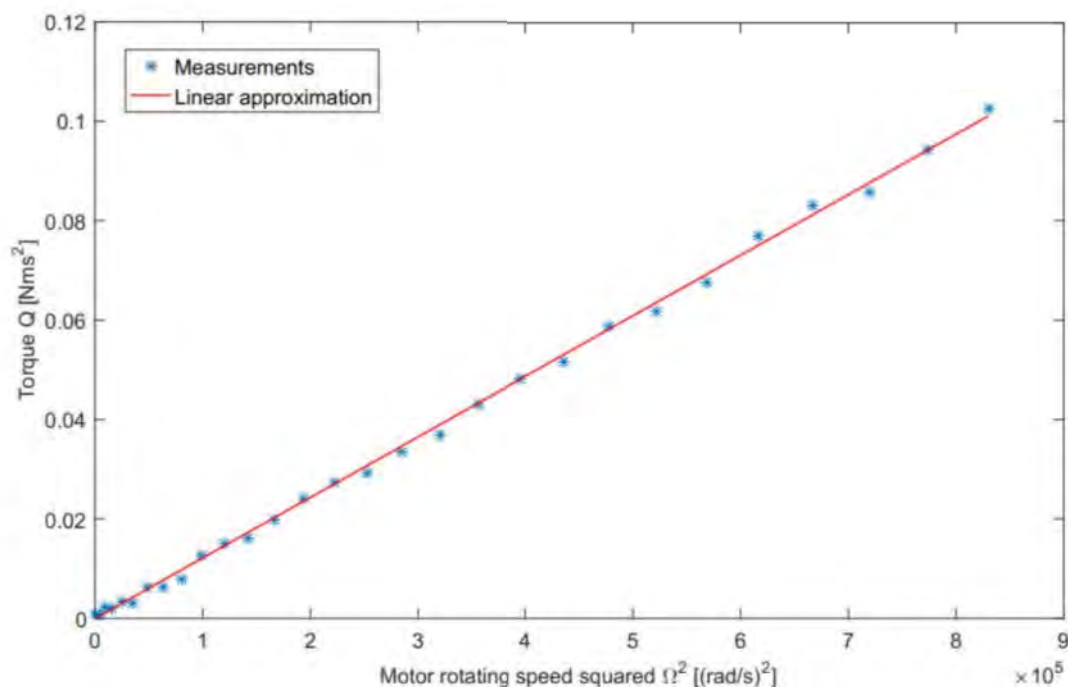
Слика 19. Вртежен момент (Torque) $[Q]$ во функција на брзината на вртење $[\Omega]$

Користејќи ги равенствата (5.13), (5.14) и експерименталните мерења, можно е да се проценат аеродинамичните коефициенти на потисок и вртежен момент:

$$\hat{C}_T = 9.2493 \cdot 10^{-6} \text{Ns}^2; \hat{C}_Q = 1.21729 \cdot 10^{-7} \text{Nms}^2. \quad (5.41)$$



Слика 20. Коефициент на вртежен момент \hat{C}_T

Слика 21. Коэффициент на потисок \hat{C}_Q

5.3 Управување со следење на квадрокоптер

Дизајнирање на стратегија за управување со следење на квадрокоптер е суштински процес за развивање и градење на UAV системи - квадрокоптери. Заедно со динамичкото моделирање и точноста на сензорите, има значително влијание врз перформансите на квадрокоптерот во достигнувањето на посакуваната точка во просторот, следејќи ја референтната траекторија и завршувањето на зададената мисија.

Целта на дизајнот на управувачкиот систем, без оглед на внатрешните и надворешните несигурности и нарушувања, е да ја стабилизира состојбата на системот околу саканата референтна состојба. Потребно е користење на повратни спреги и споредување на мерливи или проценети состојби на процесот на динамички модел со посакуваните или референтните. Системот на квадрокоптер содржи 6 степени на слобода (6-DOF) ($x, y, z, \phi, \theta, \psi$) и само четири управувачки влезови (u_1, u_2, u_3, u_4). Затоа, тоа е систем со недоволно управувања (under-actuated) и нестабилен динамички систем. Бидејќи е невозможно да се управуваат сите 6 DOF истовремено, не е возможно тоа да се прави со само една јамка - повратна спрега. Квадрокоптерот не е способен да се движи во рамките на (x-y) рамнина и да остане во состојба на лебдење, односно x и y движењата

се вршат со вртење на рамката на телото со агол на наклон (pitch angle) θ и агол на тркалање (roll angle) ϕ , респективно. Со други зборови, транслационалните движења се вршат со ротациони движења, а не со обратно, кај секој квадрокоптер. Од горенаведените причини, треба да се дизајнира дополнителна повратна спрега на управувањето, наречена надворешна повратна спрега или јамка. Таа ќе има задача да управува со внатрешната управувачка спрега за да направи x и y движење, т.е. линеарно движење по x и y -оските.

Дизајнот на управувачкиот систем е поделен во две поглавја: во дизајнот на управувањето на внатрешната јамка и на надворешната јамка.

5.3.1 Дизајн на надворешната јамка

Управувањето на надворешната јамка се дели на дизајн на две индивидуални јамки: 1. Управување на (надморската) височина (Altitude control), и 2. Управување на позицијата. Првата обезбедува постигнување на саканата (надморска) височина во z -оската, додека вториот обезбедува UAV-то да ја постигне саканата точка во $(x-y)$ рамнината.

5.3.1.1 Управувањето на височината

Со оглед на координатниот систем на рамката на телото во NWU (North (x), West (y), Up (z)), z -оската е насочена нагоре. Силата на гравитација е кон негативната z -оска, додека вкупната сила за издигање која потекнува од четири мотори е во позитивна насока.

Управувачот за (надморска) височина треба да осигура дека UAV -то ќе ја постигне и одржува саканата висина. Посакуваната сила на квадрокоптерот за да се постигне референтната точка во z -оската е дефинирана со следнава равенка:

$$F_d = m \cdot g + m \left(a_{zd} + K_{ld} \cdot (v_{zd} - v_{zm}) + K_{lp} \cdot (p_{zd} - p_{zm}) + K_{li} \cdot \int (p_{zd} - p_{zm}) \right) \quad (5.42)$$

каде: K_{ld} , K_{li} и K_{lp} се засилувања на PID -управувачот, $e_z = (z_{ref} - z_{mes})$, е грешка на поместувањето вдоль z -оската. F_d претставува прв елемент на управувањето, т.е. u_1 , дефиниран во динамичкиот модел на квадрокоптерот.

За апликација со голема референтна висина, може лесно да се постигне заситеност на моторите и управувањето на (надморската) височина може да стане неконтролабилно. Од таа причина, потребно е да се користи PID управувач со заситување:

$$e_z = \text{sat}((z_{ref} - z_{mes}), e_{z \min/\max}), \quad (5.43)$$

$$F_d = \text{sat}\left(m \cdot g + m \left(K_{1d} \cdot \dot{e}_z + K_{1p} \cdot e_z + K_{1i} \cdot \int e_z \right), F_{d \min/\max} \right), \quad (5.44)$$

каде $e_{z \min/\max}$, $F_{d \min/\max}$ ги претставуваат ограничувањата употребени за заситувањето на PID управувачот.

5.3.1.2 Управување на позиција

Дизајнот на управувањето на позицијата се заснива на два традиционални PID управувачи. Позицијата на точка во x-y рамнината се означува со $\mathbf{p} = [x, y]^T$. Грешката на растојание помеѓу референтната точка и моменталната измерена локација се бележи со \mathbf{e}_p

$$\mathbf{e}_p = \mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}_{mes} \quad (5.45)$$

Наредната равенка го дава излезот на управувачот на позиција:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} K_{2px} & 0 \\ 0 & K_{2py} \end{bmatrix} \mathbf{e}_p + \begin{bmatrix} K_{2ix} & 0 \\ 0 & K_{2iy} \end{bmatrix} \int \mathbf{e}_p + \begin{bmatrix} K_{2dx} & 0 \\ 0 & K_{2dy} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_p \right).$$

Кинематичките релации помеѓу саканото линеарно забрзување во x-y рамнината и саканото аголно поместување се дадени како следи:

$$\Theta = \frac{1}{g} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\psi_{ref}) & \cos(\psi_{ref}) \\ -\cos(\psi_{ref}) & \sin(\psi_{ref}) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

каде Θ го претставува векторот на саканиот агол на тркалање и агол на свртување (roll)

За апликации со големи растојанија на квадрокоптерот, предложеното управување на позиција нема да работи бидејќи може да достигне заситување на моторот. На пример, ако грешката на растојанието од равенката (5.45) биде одлучено да е голема, заситувачки PID мора да биде употребен, наместо традиционален. Заситувачкиот PID ја има следната форма:

$$\mathbf{e}_p = \text{sat}((\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}_{mes}), \mathbf{e}_{p\min/\max})$$

$$\Theta = \text{sat}\left(\frac{1}{g} \cdot A^{-1}\left(\mathbf{K}_{2p}\mathbf{e}_p + \mathbf{K}_{2D}\dot{\mathbf{e}}_p + \int \mathbf{K}_{2I}\mathbf{e}_p\right), \Theta_{\min/\max}\right)$$

каде $\mathbf{e}_{p\min/\max}$, $\Theta_{\min/\max}$ се ограничувања употребени за заситувачкиот PID управувач.

5.3.2 Дизајн на внатрешната јамка

Управувањето на внатрешната јамка (повратна спрега) во литературата е позната како управување на положбата (attitude control). Таа обезбедува лебдење на квадрокоптерот во $\phi, \theta \approx 0$.

5.3.2.1 Управување на положба

A. Дизајн на каскаден PID-PD управувач за следење

Управувањето на положба е дизајнирано така што тоа да овозможува обезбедување на ориентација на UAV -то околу лебдечката позиција. За зададени агли на ориентација $\Theta_d = [\phi_d, \theta_d, \psi_d]^T$ и измерени агли на ориентација $\Theta_m = [\phi_m, \theta_m, \psi_m]^T$ од сензорите, имаме:

$$\mathbf{e}_\Theta = \Theta_d - \Theta_{mes} \quad (5.47)$$

Јамката на управувањето на положбата е дизајнирана врз база на три распрегнати традиционални PID управувачи. Излезите од оваа управувачка јамка се саканите моменти со секој од правците x, y и z.

$$\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{e}_\Theta + \mathbf{K}_d \cdot \dot{\mathbf{e}}_\Theta \quad (5.48)$$

каде: $\boldsymbol{\tau}_d = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ е вектор на сакани моменти, додека $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ се матрици на засилување на трите PD управувачи.

PD регулаторите во равенката (5.48), постануваат заситени, како што следи:

$$\mathbf{e}_\Theta = \text{sat}(\Theta_d - \Theta_{mes}, \mathbf{e}_{\Theta\min/\max}) \quad (5.49)$$

$$\tau_d = \text{sat} \left(\mathbf{K}_p \cdot \mathbf{e}_\Theta + \mathbf{K}_d \cdot \dot{\mathbf{e}}_\Theta, \tau_{d \min/\max} \right) \quad (5.50)$$

В. Дизајн на PID-MPC управување за следење

Во споредба со предходното поглавје, управувањето на положбата и позиција остануваат исти, само управувањето на положбата е редизајнирано со користење на Моделско Предиктивно Управување (Model Predictive Control) со ограничувања.

Треба да се разгледува следната општа форма на дискретна постројка:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) \\ y(k) &= C_m x_m(k), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

каде: $u \in \mathbb{R}^p$ е влезен управувачки вектор, $y \in \mathbb{R}^q$ е излезен вектор, $x \in \mathbb{R}^n$ е состојбен вектор со димензија n , додека A_m, B_m, C_m се некои константни матрици кои ја претставуваат постројката. Тука, бројот на излези е сетиран да биде помал или еднаков на бројот влезови; алтернативно, неконтролабилни независни состојби ќе се појават. Разликата помеѓу состојбените и управувачки променливи ќе ја означуваме со:

$$\begin{aligned} \delta x_m(k+1) &= x_m(k+1) - x_m(k) \\ \delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Проширениот состојбен модел на постројката се добива со комбинирање на (5.51), (5.52), така што:

$$\begin{aligned} \overbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_m(k+1) \\ \mathbf{y}(k+1) \end{bmatrix}}^{\tilde{\mathbf{x}}(k+1)} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{0}_{n \times q} \\ \mathbf{C}_m \mathbf{A}_m & \mathbf{I}_{q \times q} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{x}}(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times n} & \mathbf{I}_{q \times q} \end{bmatrix}}^{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Понатаму, воведуваме нов состојбен вектор $\bar{\mathbf{x}}(k) = [\delta \mathbf{x}_m(k) \quad \mathbf{y}(k)]^T$, каде $\bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^{n_+}$ е таков да $n_+ = n + q$, и три реални матрици (A, B, C), така што равенките во проширениот состојбен простор на (5.53) се трансформираат во:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(k+1) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}\tag{5.54}$$

За поедноставување на означувањето, состојбениот вектор ќе продолжиме да го означуваме со $\mathbf{x}(k)$. Идниот состојбен вектор би можел да се пресметува од равенките (5.54) во дискретно време k , со замена на почетниот услов на управувачкиот вектор $\delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_0$:

$$\begin{aligned}x(k+1|k) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) \\ x(k+2|k) &= \mathbf{A}^2x(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k+1) \\ &\vdots \\ x(k+N_p|k) &= \mathbf{A}^{N_p}x(k) + \mathbf{A}^{N_p-1}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) + \dots + \mathbf{A}^{N_p-N_c}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k+N_c-1)\end{aligned}\tag{5.55}$$

Кога равенката (5.55) се замени во (5.54), се добива предвиден излез:

$$\begin{aligned}y(k+1|k) &= \mathbf{C}\mathbf{A}x(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) \\ y(k+2|k) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2x(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k+1) \\ &\vdots \\ y(k+N_p|k) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_p}x(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_p-1}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) + \dots + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_p-N_c}\mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k+N_c-1)\end{aligned}\tag{5.56}$$

Следствено, излезниот вектор \mathbf{Y} и инкременталниот управувачки вектор $\Delta\mathbf{U}$, равенката (43) ќе имаме:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= [y(k+1|k)^T, y(k+2|k)^T, \dots, y(k+N_p|k)^T]^T \\ \Delta\mathbf{U} &= [\delta\mathbf{u}(k)^T, \delta\mathbf{u}(k+1)^T, \dots, \delta\mathbf{u}(k+N_c-1)^T]^T\end{aligned}\tag{5.57}$$

Општата форма на матричните ознаки (5.56) и (5.57) би можела да биде како што следи:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Theta}\Delta\mathbf{U}\tag{5.58}$$

каде:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}.$$

За зададен референтен сигнал во дискретно време k , означен со $\mathbf{r}(k)$, целта на of MPC е да го доведе предвидениот излез што е можно поблизу до референтниот сигнал, со употреба на најдобро - возможниот управувачки вектор ΔU . Претпоставуваме дека $\mathbf{r}(k)$, ќе остане константен во рамките на оптимизирачкиот хоризонт:

$$\mathbf{R}_s = \bar{\mathbf{R}}_s \mathbf{r}(k) = \overbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T}^{N_p} \mathbf{r}(k).$$

Функцијата на чинење (cost function), која е соодветна за минимизација на целта на управувањето, е дефинирана како следи:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y})^T (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y}) + \Delta U^T \bar{\mathbf{G}} \Delta U \quad (5.59)$$

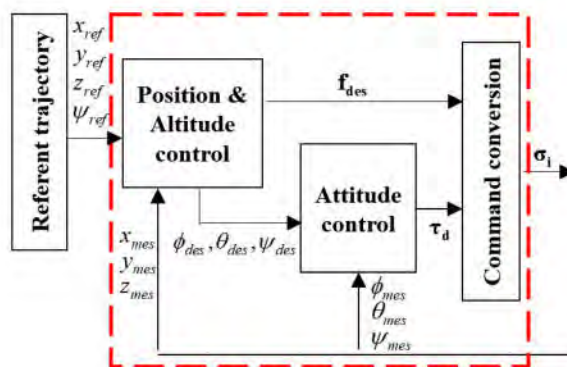
каде дијагоналната матрица $\bar{\mathbf{G}}$ е со форма $\bar{\mathbf{G}} = \lambda I_{N_c \times N_c}$ при што λ е позитивен параметар за подесување употребен за сакана доброт (performance) на системот со повратна врска. За да се најде оптимално управување ΔU кое го минимизира \mathbf{J} , може да се замени (5.59) во (5.58), тогаш потребниот и доволен услов за \mathbf{J} да биде минимално е да парцијалниот извод на \mathbf{J} по ΔU биде еднаков на нула. Понатаму, со преуредување на изразот и наоѓање на векторот на инкрементално управување ΔU се добива:

$$\Delta U = (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} + \bar{\mathbf{G}})^{-1} (\boldsymbol{\Theta}^T \bar{\mathbf{R}}_s \mathbf{r}(k) - \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{H} \mathbf{x}(k)) \quad (5.60)$$

каде зададената референтна точка на векторскиот сигнал е $\mathbf{r}(k) = [r_1(k), r_2(k), r_3(k)]^T$. Во овој случај референтниот влез којшто доаѓа од управувањето на позиција е $[\phi_d(k), \theta_d(k), \psi_d(k)]^T$. Со примена на управување на хоризонт што се оддалечува (receding horizon control), се земаат првите p елементи од ΔU , при формирањето на инкрементално оптимално управување:

$$\delta \mathbf{u} = \overbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{N_c} (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} + \bar{\mathbf{G}})^{-1} (\boldsymbol{\Theta}^T \bar{\mathbf{R}}_s \mathbf{r}(k) - \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{H} \mathbf{x}(k)) \quad (5.61)$$

Управувачкиот алгоритам работи како што следи: врз основа на почетните услови, идните состојбени и излезни вектори се пресметуваат во согласност со предвидениот хоризонт (prediction horizon) N_p . Потоа се пресметуваат матриците H , Θ , кои се користат за да се добие векторот на инкременталното оптимално ΔU за управувачкиот хоризонт N_c . Така, првите p елементи кои се употребуваат од ΔU се носат до постројката, и оваа процедура се повторува итеративно. Идејата е да се обезбеди предвидениот излезен вектор Y да е што поблизу до референтниот влезен вектор.



Слика 22. Шема со каскадно управување за следење на квадрокоптер

5.5 Заклучок

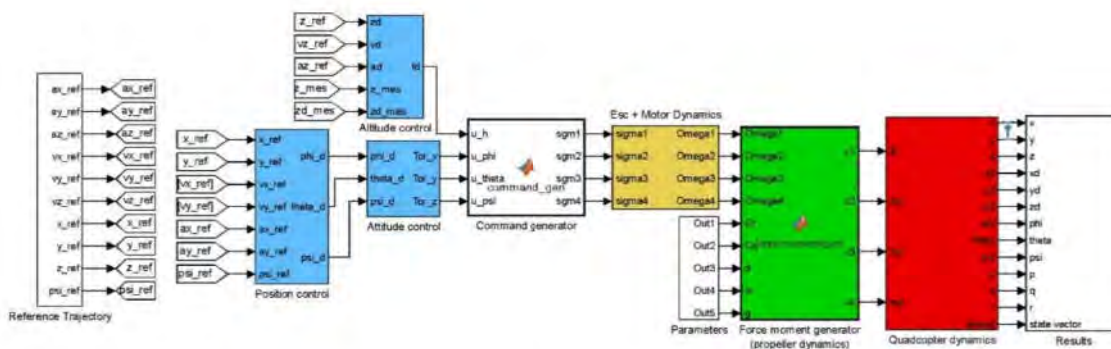
Во ова поглавје е разработено динамичкото моделирање за квадаторот со рамка на “плус“ конфигурација. Поконкретно, прикажани се сите потребни фази за развој на комплетен линеарен динамички модел на квадрокоптер. Идентификацијата на различни параметри од реалните експериментални мерења, како што се коефициентите на потисок и вртежен момент на пропелерите, момент на инерција, динамички модел на моторите, итн.

Со оглед на фактот дека динамиката на квадаторот е многу нелинеарна и тешка за управување, се презентира пристап за линеаризација на моделот околу точка на движење и добивање линеарен динамички модел. Дизајнот на управувачкиот систем се потпира на три под-управувачки дизајни како што е прикажано на Слика 15 (управување на (надморска) височина, управување на позиција и управување на положба), кои вкупно се состојат од 6 PID / PD управувачи или 3 PID плус еден линеарен MIMO MPC.

Глава 6

6. Симулациско опкружување

Ова поглавје ќе ги опфати симулациите направени во MATLAB Simulink за две различни траектории за следење: 1. Референтна траекторија на вертикално полетување и слетување, 2. Спирална (Хеликална) референтна траекторија. Најпрвин, ја презентираме на следната слика, која е општа шема на управувачот на летање со динамички модел на квадрокоптер.



Слика 23. Општа шема на управувач на летање со динамички модел на квадрокоптер.

Следниот параграф ја објаснува Слика 36, со краток хронолошки вовед за секој блок што е претставен на сликата. Блокот на референтна траекторија (Reference trajectory) ги обезбедува останатите блокови поврзани со: референтна или посакувана позиција, вектори за брзина и забрзување за дадена посакувана точка во просторот, или дадена посакувана траекторија што треба да се следи.

Потоа се претставени три сини блокови кои претставуваат три линеарни управувачи на квадрокоптерот објаснет во Поглавје 5. Управувањето на (надморската) височина (attitude

control) овозможува постигнување и одржување на саканата (надморска) височина или висина во z-насоката. Таа содржи PID управувач врз основа на равенката (5.42). Управувањето на позиционирање (Position control) содржи два одделни PID управувачи, со што се постигнува саканата точка во x-y рамнината, соодветно со користење на равенката (5.46). Како што беше споменато погоре, бидејќи квадрокоптерот е уред со недоволно управување (under actuated), движењата на пренос во x-y рамнината се изведуваат со аголно движење на квадрокоптерот. Оттука, излез од управувачот на позицијата е посакуваниот или управуван агол $[\phi_d, \theta_d, \psi_d]$. Управувањето на состојбата (Attitude control) содржи, во првиот случај, три индивидуални PD контролери, за обезбедување на посакуваната ориентација на квадрокоптерот. Овој блок се добива со помош на равенката (5.48). Во вториот случај, управувањето на состојбата се менува во еден MIMO линеарен MPC, објаснет на крајот од Поглавје 5.3.

Излезите од трите управувачки блокови се доведуваат до конверторот на управување (Command generator), којшто во реалната примена на управувачот на летот се добива како апроксимација на инверзната динамика на пропелерите и моторите. Последнава динамика се добива со избор на конфигурација преку избор на рамка на системот UAV и дефинирање на неговите параметри, како што се маса, должина на рака, димензии на пропелери, тип на мотор, тип на ESC итн. Блокот означен со "ESC + motor dynamics" е формулиран врз основа на равенката (5.40). Како што објаснува и самото име на зелениот блок "Force moment generator" ("Генератор на силовен момент"), истиот ја претставува динамиката на пропелерите и конфигурацијата на рамката на квадрокоптерот. Овој блок всушност ги содржи равенките (5.17), (5.18), кои директно ја изразуваат врската помеѓу аголните брзини на пропелерите и силата и моментите. Црвениот блок ги содржи равенките (5.34), кои го означуваат линеарниот динамички модел на квадрокоптерот. За време на симулацијата, резултатите генерирани од црвениот блок означен со "Quadcopter dynamics" ("Динамика на квадрокоптерот") се внесуваат во блокот означен со "Results" ("Резултати"), наменет за генерирање на резултатите од симулацијата, илустрирани подолу во ова поглавје.

Во следната табела се прикажани параметрите кои се користат за симулација:

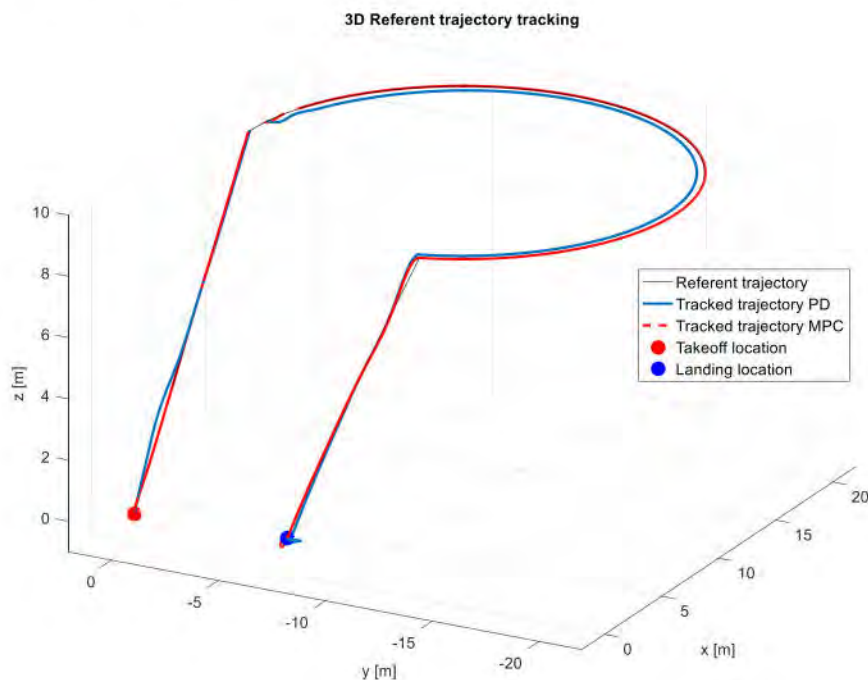
ТАБЕЛА 1. ПАРАМЕТРИ КОРИСТЕНИ ВО СИМУЛАЦИЈАТА

Параметар	ВРЕДНОСТ	Единица	Опис
m	1.2	kg	Вкупна маса на телото
g	9.81	m/s^2	Гравитационо забрзување
d	0.185	m	Должина на раката
I_{xx}	$8.623 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$	Инерцијален момент во x-оска
I_{yy}	$8.631 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$	Инерцијален момент во y-оска
I_{zz}	$1.615 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$	Инерцијален момент во z-оска
\hat{C}_T	$9.25 \cdot 10^{-6}$	Ns^2 / rad^2	Потисна константа на моторот
\hat{C}_Q	$1.217 \cdot 10^{-3}$	Ns^2 / rad^2	Константа на вртежниот момент на моторот

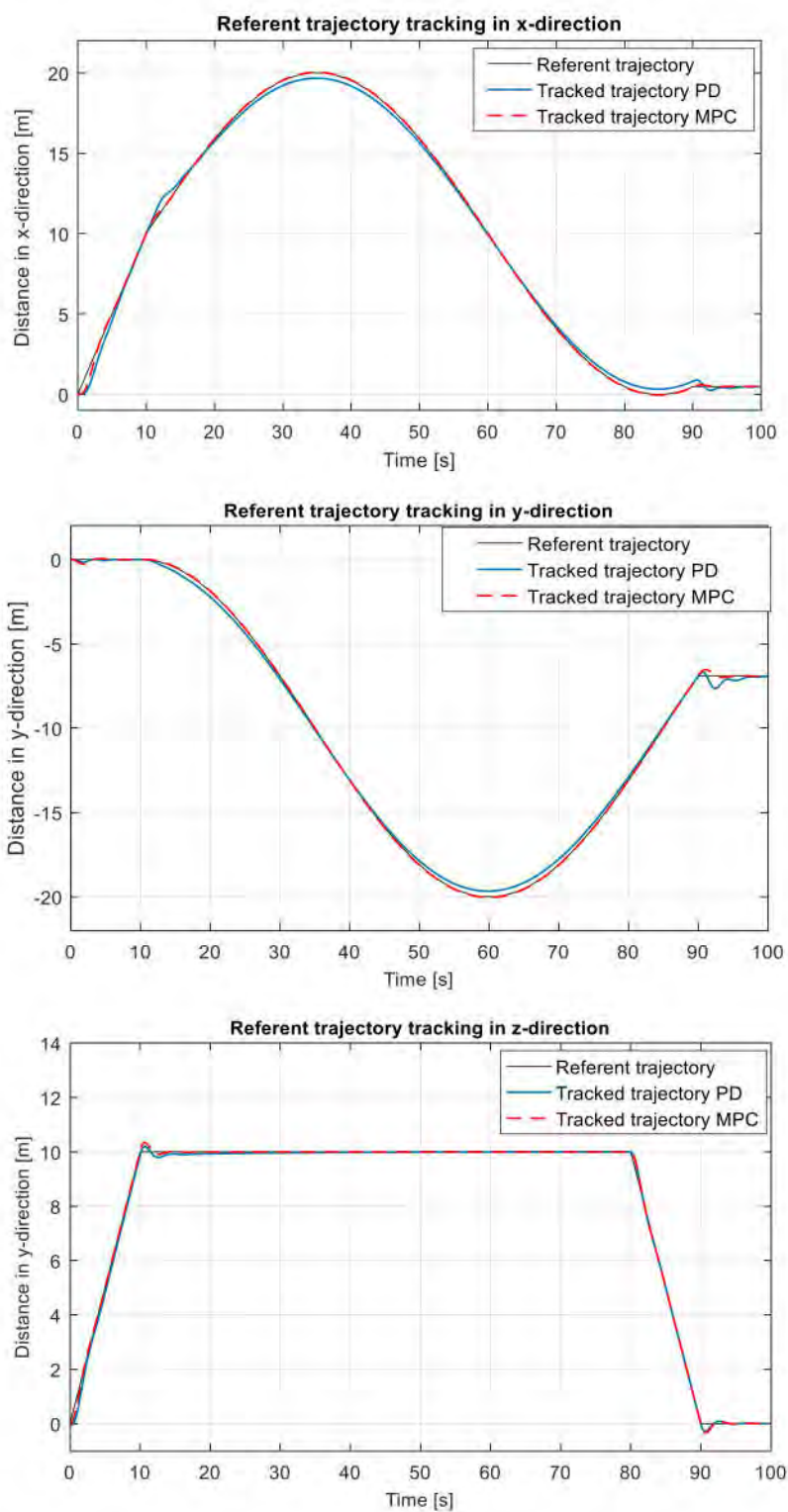
6.1 Резултати од симулацијата на управувањето со следење

6.1.1 VTOL следење на траекторија

Се зема референтна траекторија таква што првиот нејзин дел е скоро идентичен со полетувањето во правец z, вториот дел се состои од лет во регион на лебдење ($z=\text{const}$), и третиот дел е слетувањето.

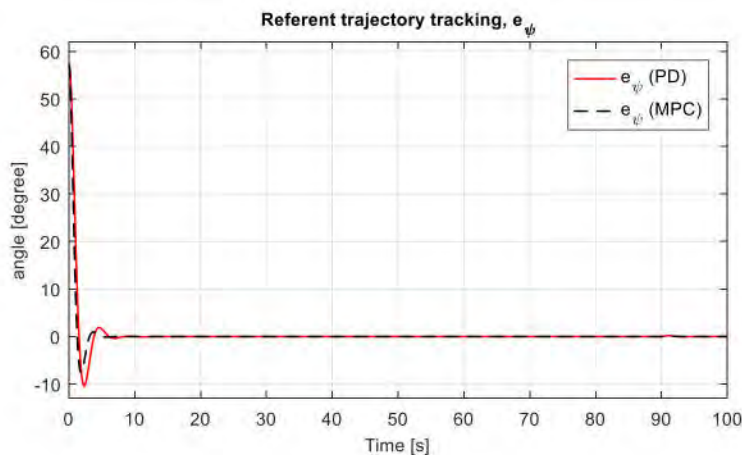


Слика 24. Следење на 3D-референтна траекторија со PD и MPC.



Слика 25. Референтна траекторија во правците x , y , z , со PD и MPC.

MPC управувањето е дизајнирано врз база на хоризонт на предвидување $N_p = 10$, и хоризонт на управување $N_c = 2$.

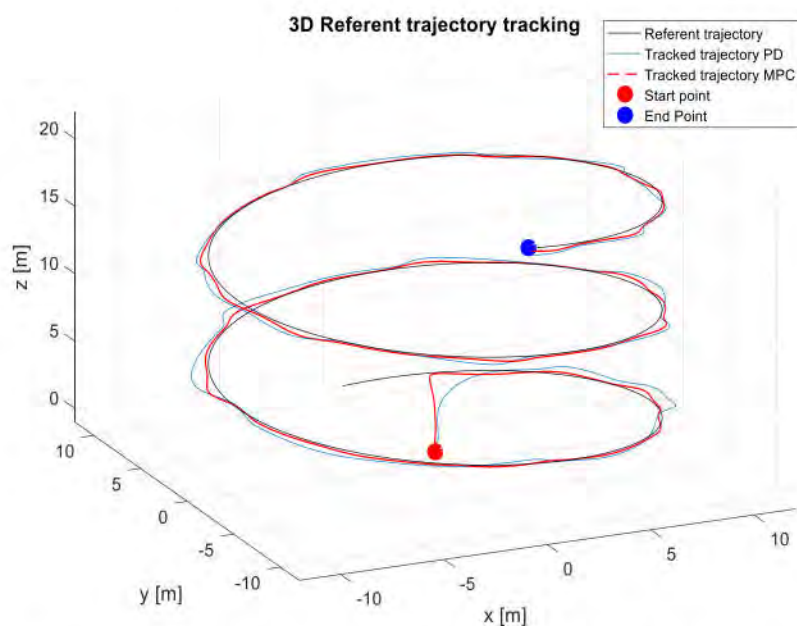


Слика 26. Конвергенција на грешката на аголот на свртување (yaw angle) e_ψ со PD и MPC.

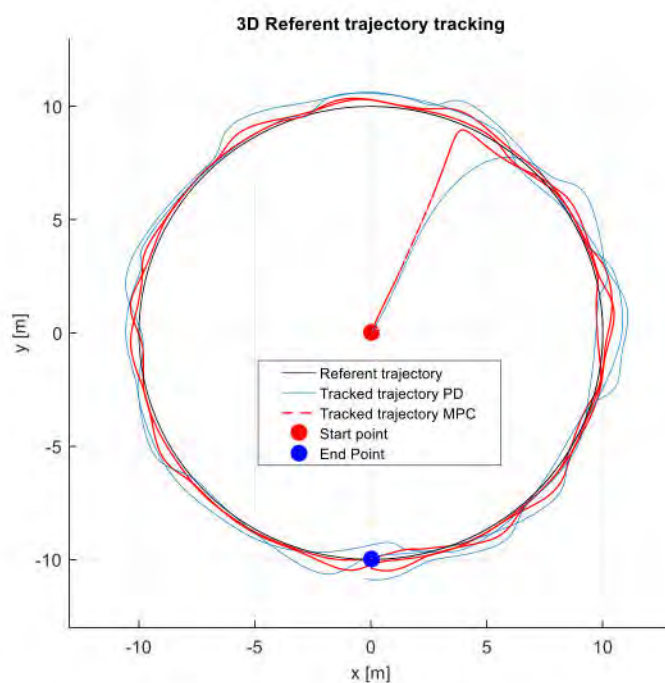
Може да се обсервира дека резултатите од следењето се многу близу до референтната траекторија. Линеарните PID-MPC управувачка структура обезбедува подобри резултати отколку PID-PD управувачката структура. Од Слика 24 и Слика 25 може да се увиди дека следењето на траекторија со PID-PD управувачка структура содржи значителна грешка на стационарна состојба, и вдолж траекторијата, има извесни надмашувања (overshoots), кои што ги нема со примената на PID-MPC. Според Слика Слика 26, управувањето на ориентацијата на аголот на свртување (yaw angle) во двата случаеви е скоро иста од аспект на време на смирување (settling time), но следењето на ориентацијата е малку подобра со MPC.

6.1.2 Следење на хеликална траекторија

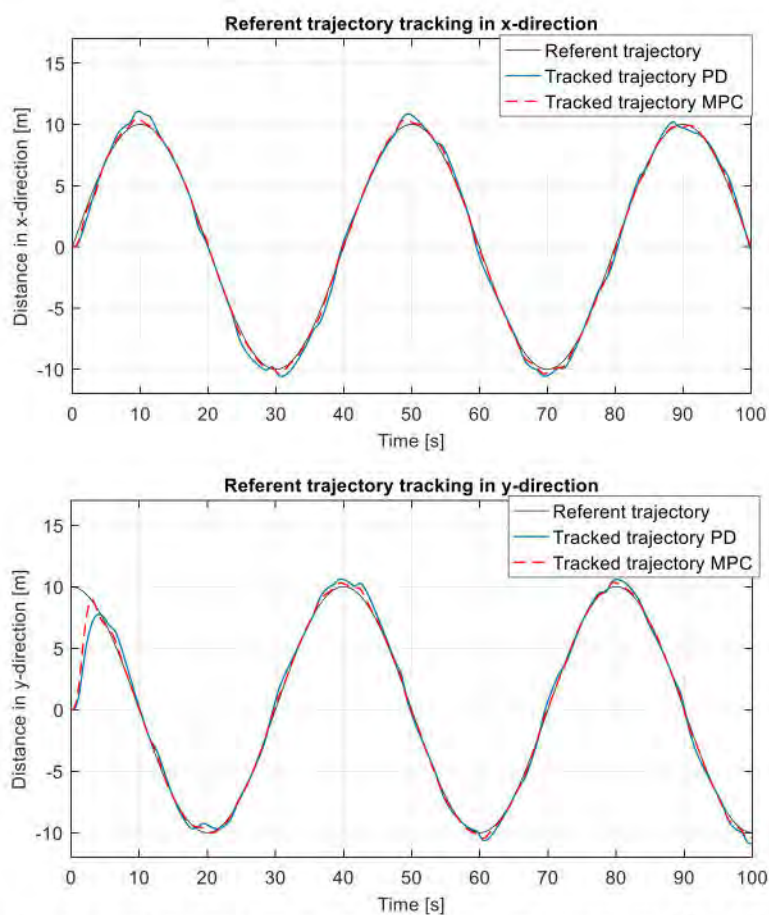
Во ова поглавје се презентира споредба на двете каскадни управувачки стратегии при пратење на хеликална траекторија, во присуство на надворешни периодични нарушувања на вртежниот момент (torque) применети во x и y-оските. Периодичното нарушување на вртежниот момент во x -оската има магнитуда $37 \cdot 10^{-3}$ Nm, период 10s, време на исполнување на периодата 5% и фазен помак 8s. Од друга страна, периодичното нарушување на вртежниот момент во y -оската има магнитуда $28 \cdot 10^{-3}$ Nm, период 6s, време на исполнување на периодата 10% и фазен помак 5s.



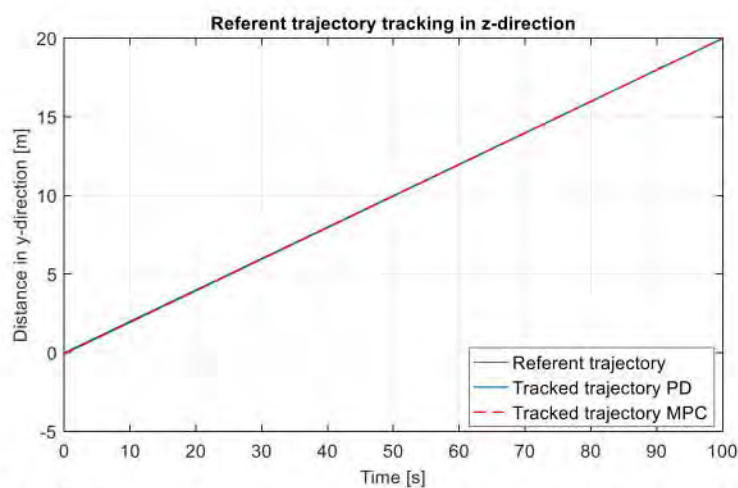
Слика 27. Следење на 3D -референтна траекторија со PD и MPC во присуство на надворешни периодични нарушувања на вртежниот момент.



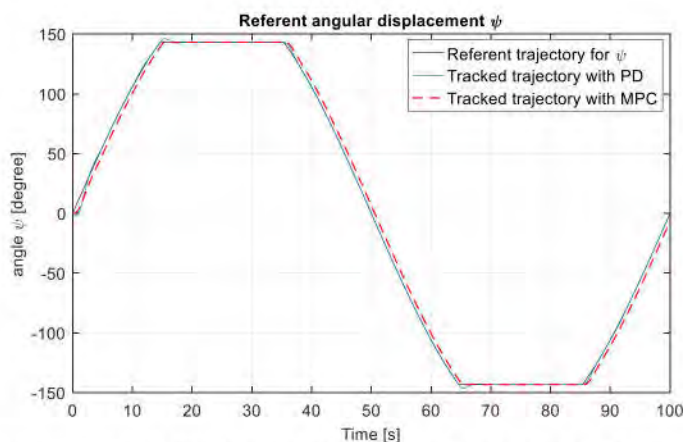
Слика 28. Следење на 3D -референтна траекторија со PD и MPC во присуство на надворешни периодични нарушувања на вртежниот момент (Поглед одозгора во x - y рамнината)



Слика 29. Следење на референтна траекторија во x , y -правците со PD и MPC во присуство на надворешни периодични нарушувања на вртежниот момент



Слика 30. Следење на референтна траекторија во z -правеот со PD & MPC



Слика 31. Референтна траекторија на поместување на аголот на завртување (yaw angle) со PD и MPC.

Од резултатите од симулацијата прикажани на Слика 40 и Слика 41 за следење на 3D-хеликална референтната траекторија, може да се изврши споредбата помеѓу траекториите на следење со PD регулатори и со MPC, за управување на состојба. Иако двата управувачи глобално не го губат следењето, вториот е помалку чувствителен на надворешни нарушувања, и обезбедува малку подобро следење. Слика 42 и Слика 43 го прикажуваат експлицитно следењето на траекторијата во трите насоки x , y и z , додека Слика 44 ја покажува посакуваната траекторија на поместување на ψ -аголот и следењето на ориентацијата на аголот на завртување, со овие два линеарни управувачи. Од друга страна, на Слика 39 зададената референтна посакувана ориентација на аголот ψ е фиксна.

6.2 Заклучок

Покрај теоретските излагања во Глава 5 за динамичко моделирање на квадрокоптер и дизајнирање управувач на летот, во ова поглавје е детално разработен развојот на генерализираното UAV симулационо опкружување на беспилотни летала базирано на MATLAB Simulink. Поконкретно, со споредба се истестирани два каскадни управувачи на траекторија, како што се PID-PD и PID-MPC, под услови на зададена траекторија на вертикално полетување и слетување и хеликална траекторија на следење. Резултатите од симулацијата потврдуваат дека каскадните управувачи за следење ја постигнале целта да ги задоволат потребните за добивање на што подобра траекторија за следење, со одржувањето на доволна мазност (smoothness) за време на летот. Сепак, PID-MPC покажува подобри резултати од PID-PD. Со цел нашите резултати да бидат

пореални, во остатокот од тезата ќе се придржуваме до управување и следење со PID-PD принципот. Причината е тоа што Pixhawk (електронскиот модул кој е стандарден управувач на летање којшто најчесто се користи во сите комерцијални и истражувачки апликации за летала) нема многу голема процесорска моќ и неговото внатрешно каскадно управување главно се заснова на PID-PD.

Глава 7

Примена на стабилизабилноста со повратна спрега во стабилизација со следење на квадкоптер

7.1 Вовед

Во ова поглавје е разработена претставувањето на квадкоптерот како нелинеарен дескрипторски систем. Конкретно, теоретските резултати од Глава 4 за дизајнирање на управување на стабилизацијата со повратна спрега за дескрипторските системи, и теоретските резултати од Глава 5 за дизајнирање каскадно управување за следење се споени за да се направи хибридно нелинеарно стабилизирачко управување кое се имплементира во симулација за стабилизација на квадкоптер и следење на зададена траекторија.

На крајот од главата, разработени се од симулацијата базирани на бездимензионални параметри за подесување, за задачата да се постигне саканата точка во просторот.

7.2 Ре-презентација на математичкиот модел на квадкоптерот како нелинеарен дескрипторски систем

Во оваа глава се дава најпрвин една нова ре-презентација на математичкиот модел на квадрокоптерот како нелинеарен дескрипторски систем. Нелинеарната динамика на квадрокоптерот се состои од следните диференцијални равенки:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x, \\
 \dot{y} &= v_y, \\
 \dot{z} &= v_z, \\
 \dot{v}_x &= \frac{1}{m} [\cos \phi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi + \sin \phi \cdot \sin \psi] \cdot U_1 \\
 \dot{v}_y &= \frac{1}{m} [\cos \phi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi - \sin \phi \cdot \cos \psi] \cdot U_1 \\
 \dot{v}_z &= -g + \frac{1}{m} [\cos \phi \cdot \cos \theta] \cdot U_1 \\
 \dot{\phi} &= \omega_\phi \\
 \dot{\theta} &= \omega_\theta \\
 \dot{\psi} &= \omega_\psi \\
 \dot{p} &= \frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} qr + \frac{1}{J_{xx}} \cdot U_2 \\
 \dot{q} &= \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} pr + \frac{1}{J_{yy}} \cdot U_3 \\
 \dot{r} &= \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} pq + \frac{1}{J_{zz}} \cdot U_4
 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

каде U_1, U_2, U_3, U_4 се трансформирани аголни брзини на четирите пропелери, додека x, y, z и ϕ, θ, ψ се линеарни и аголни поместувања, и нивните изводи v_x, v_y, v_z респективно $\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi$, сите во однос на земната координатна рамка. Од друга страна, p, q, r се аголни промени во единица време во координати на рамката на телото. Параметрите m, g – се тоталната маса и земјиното забрзување во негативната z -оска, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – се моменти на инерција по x - y - z оските. Нека ги разгледаме следните три алгебарски равенки:

$$\begin{aligned}
 \omega_\phi &= p + s_\phi t_\theta \cdot q + c_\phi t_\theta \cdot r, \\
 \omega_\theta &= c_\phi \cdot q - s_\phi \cdot r, \\
 \omega_\psi &= s_\phi / c_\theta \cdot q + c_\phi / c_\theta \cdot r,
 \end{aligned} \quad (7.2)$$

каде $c_{(\cdot)}, s_{(\cdot)}$ и $t_{(\cdot)}$ се скратени ознаки за функциите \cos, \sin и \tan .

Во општ случај, равенките (7.1) и (7.2) се за нелинеарен дескрипторски систем за квадрокоптерот. Всушност, диференцијалната равенка (7.1) соодветствува на диференцијалната равенка (4.18), а алгебарските равенки (7.2) соодветствуваат на алгебарската равенка (4.19).

7.3 Примена во стабилизација на квадрокоптер

Клучно е да се избере функцијата слична на функција на Љапунов, за секој посебен проблем. За да се најде функција слична на функција на Љапунов за систем без управување, т.е., $\dot{x}_1 = f(x_1, x_2)$, земаме дека сите влезови во (7.1) се нула, $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$, и добиваме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= 0, & \dot{\phi} &= \omega_\phi, & \dot{p} &= \frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} qr, \\ \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_y &= 0, & \dot{\theta} &= \omega_\theta, & \dot{q} &= \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} pr, \\ \dot{z} &= v_z, & \dot{v}_z &= -g, & \dot{\psi} &= \omega_\psi, & \dot{r} &= \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} pq. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Познато е дека Љапуновата стабилност е метод засниван на енергија. Квадрокоптерот, како физички систем, е систем кој ја запазува енергијата (energy conservative system), т.е., сумата од кинетичката и потенцијалната енергија не се менува во времето. Според тоа, функцијата v слична на функција на Љапунов ја дефинираме со $v = \alpha e_t + \beta e_r$, за некои бездимензионални коефициенти за подесување α, β , каде

$e_t = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2gz)$ е енергијата на translација, и $e_r = \frac{1}{2}(J_{xx}p^2 + J_{yy}q^2 + J_{zz}r^2)$ е енергијата на ротација, т.е.,

$$v = \frac{\alpha m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2gz) + \frac{\beta}{2}(J_{xx}p^2 + J_{yy}q^2 + J_{zz}r^2) \quad (7.4)$$

Имаме, за \dot{v} :

$$\dot{v} = \alpha m(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z + g\dot{z}) + \beta(J_{xx}p\dot{p} + J_{yy}q\dot{q} + J_{zz}r\dot{r}) \quad (7.5)$$

Потоа со замена на равенката (7.3), добиваме $\dot{v} = 0$. Како последица, равенката (7.4) и (7.5) ги задоволува условите (i), (ii) од Теорема 4.2 и Последица 3. За ре-презентацијата (7.1) и (7.2) на квадрокоптер како дескрипторски систем, се покажува дека селектираната функција слична на функцијата на Љапунов е корисна за добивање на управување.

Формулата (4.20) со $Q_1(x_1, x_2) = I_4$ ги дава следните стабилизирачки управувања u_1, u_2, u_3, u_4 :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha[v_x(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) + v_y(c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) + v_z(c_\phi c_\theta)] \\ u_2 &= -\beta p = -\beta(\omega_\phi - \omega_\psi s_\theta) \\ u_3 &= -\beta q = -\beta(\omega_\theta c_\phi - \omega_\psi s_\phi c_\theta) \\ u_4 &= -\beta r = -\beta(\omega_\psi c_\phi c_\theta - \omega_\theta s_\phi) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Имплементацијата на нелинеарно управување со повратна спрега коешто е внатрешна јамка во стабилизацијата на квадрокоптерот се добива со приклучување на u_i кон управувањето за следење u_{ici} .

$$U_i = \gamma \cdot u_{ici} + u_i \quad (7.7)$$

каде $i \in \{1, \dots, 4\}$, γ е бездимензионален коефициент за подесување, и U_i се применети управувачки сигнали на нелинеарниот дескрипторски систем на квадрокоптерот. Саканиот ефект на внатрешната и надворешната јамка е да обезбеди побрза стабилизација и поспоро следење на траекторија, респективно.

7.4 Алгоритам за нумеричко решавање на дескрипторскиот модел на квадрокоптер

Нека дискретното време го означиме со k така што $k = 0, 1, 2, \dots$, и нека ги направиме следните замени за дискретна ре-презентација на состојбениот вектор $\mathbf{x}(t_k)$ и управувачки вектор $\mathbf{u}(t_k)$

$$\left. \begin{aligned} x(k) &= x(t_k), & \phi(k) &= \phi(t_k), & p(k) &= p(t_k), \\ y(k) &= y(t_k), & \theta(k) &= \theta(t_k), & q(k) &= q(t_k), \\ z(k) &= z(t_k), & \psi(k) &= \psi(t_k), & r(k) &= r(t_k), \\ v_x(k) &= v_x(t_k), & \omega_\phi(k) &= \omega_\phi(t_k), & & \\ v_y(k) &= v_y(t_k), & \omega_\theta(k) &= \omega_\theta(t_k), & u_i(k) &= u_i(t_k), \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ v_z(k) &= v_z(t_k), & \omega_\psi(k) &= \omega_\psi(t_k), & & \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Нека Δt биде мал број. Тогаш дескрипторската алгебарска ре-презентација на нелинеарниот квадрокоптерски модел (7.1) и (7.2) ќе ги има следните итеративна шеми:

- За линеарни поместувања и линеарни брзини во $x - y - z$ оските, имаме:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= x(k) + \Delta t \cdot v_x(k), \\
 v_x(k+1) &= v_x(k) + \frac{\Delta t}{m} \cdot (\cos \phi(k) \cdot \sin \theta(k) \cdot \cos \psi(k) + \sin \phi(k) \cdot \sin \psi(k)) \cdot U_1(k), \\
 y(k+1) &= y(k) + \Delta t \cdot v_y(k), \\
 v_y(k+1) &= v_y(k) + \frac{\Delta t}{m} \cdot (\cos \phi(k) \cdot \sin \theta(k) \cdot \sin \psi(k) - \sin \phi(k) \cdot \cos \psi(k)) \cdot U_1(k), \\
 z(k+1) &= z(k) + \Delta t \cdot v_z(k), \\
 v_z(k+1) &= v_z(k) + \frac{\Delta t}{m} \cdot (\cos \phi(k) \cdot \cos \theta(k)) \cdot U_1(k) - g,
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

- За аголни поместувања и аголни брзини во земна координатна рамка и аголни промени во времето во координатна рамка на телото, имаме:

$$\begin{aligned}
 p(k+1) &= p(k) + \Delta t \cdot \left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} q(k) \cdot r(k) + \frac{1}{J_{xx}} U_2(k) \right), \\
 q(k+1) &= q(k) + \Delta t \cdot \left(\frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} p(k) \cdot r(k) + \frac{1}{J_{yy}} U_3(k) \right), \\
 r(k+1) &= r(k) + \Delta t \cdot \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} p(k) \cdot q(k) + \frac{1}{J_{zz}} U_3(k) \right) \\
 \phi(k+1) &= \phi(k) + \Delta t \cdot \omega_\phi(k), \\
 \theta(k+1) &= \theta(k) + \Delta t \cdot \omega_\theta(k), \\
 \psi(k+1) &= \psi(k) + \Delta t \cdot \omega_\psi(k),
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_\phi(k+1) \\ \omega_\theta(k+1) \\ \omega_\psi(k+1) \end{bmatrix} = S^{-1}(k+1) \begin{bmatrix} p(k+1) \\ q(k+1) \\ r(k+1) \end{bmatrix}$$

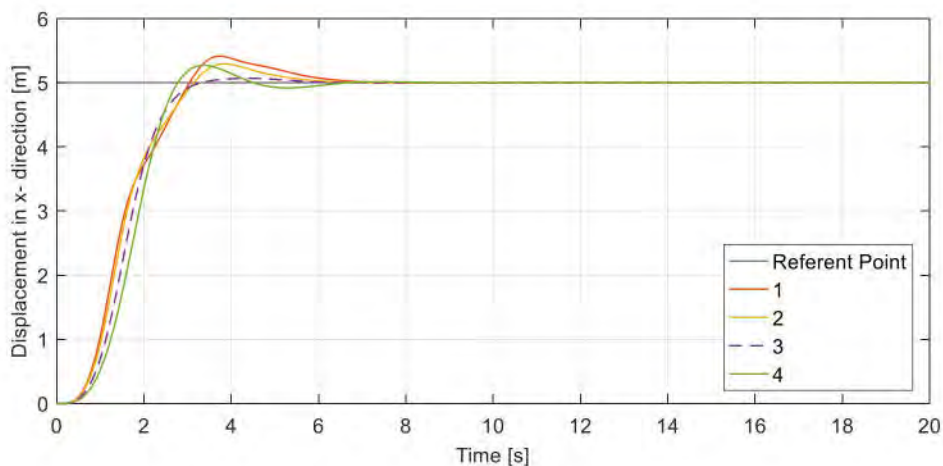
7.5 Симулациони резултати за стабилизација на квадрокоптер

Теоријата во тезата беше истестирана на стабилизација на квадрокоптер, за задачата на достигнување на саканата точка $[x, y, z]^T = [5, 5, 10]^T$ во просторот, притоа одржувајќи го аголот на завртување (yaw angle) фиксиран, т.е., $\psi = 0$. Почетната положба е земена $[0, 0, 0]^T$, и $\psi = 0$. Споредбата на стабилизацијата на квадрокоптерот е направена за четири различни симулации. Управувачката магнитуда помеѓу управувањето за следење и стабилизирачкото управување во (7.7) е достигната со параметрите за подесување α, β, γ презентирани во Табела 2.

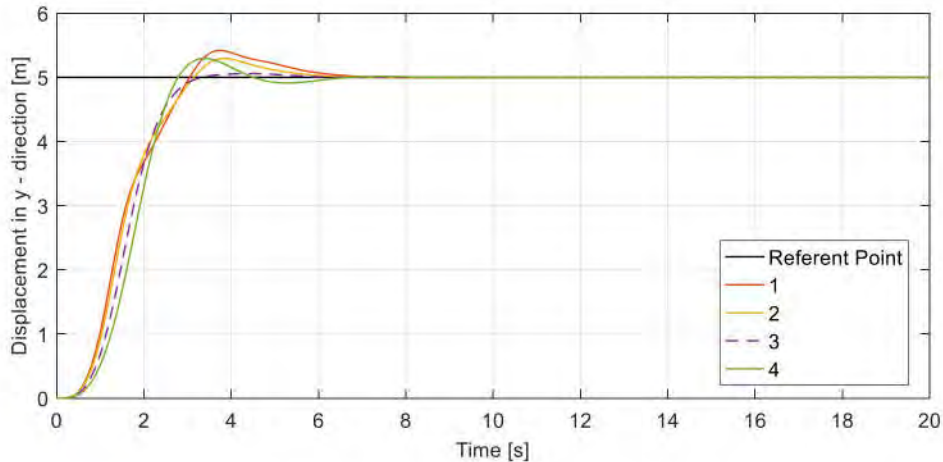
ТАБЕЛА 2. ПАРАМЕТРИ ЗА ПОДЕСУВАЊЕ НА МАГНИТУДАТА НА УПРАВУВАЊЕТО

Број на симулација	α	β	γ
1	0	0	1
2	0.08	0.01	1
3	0.42	0.02	0.9
4	0.83	0.03	0.8

Првата симулација ('1') обработува стабилизација постигната со користење само на управување за следење. Потоа во наредните симулации, постепено се намалува магнитудата на управувањето за следење, т.е., γ , и истовремено зголемување на магнитудата на управувањето за стабилизација со повратна спрега, т.е., α и β во (7.6)

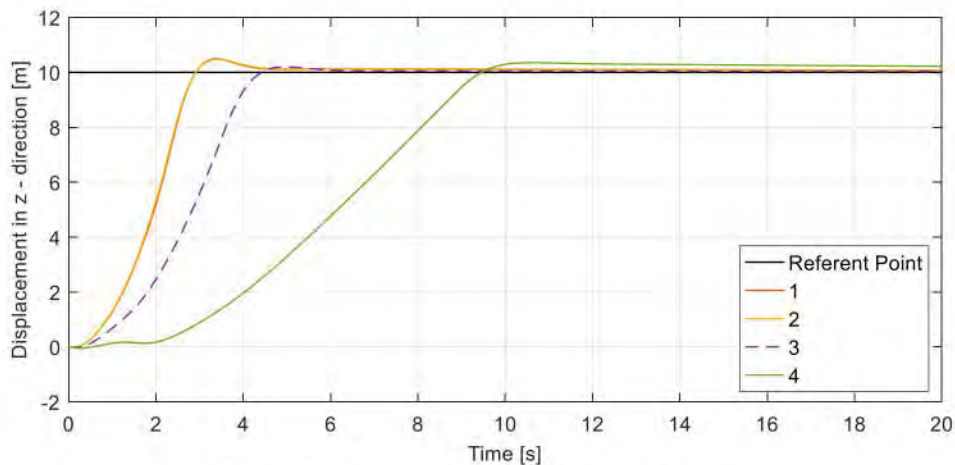


Слика 32. Линеарно поместување во x-оската



Слика 33. Линеарно поместување во y -оската

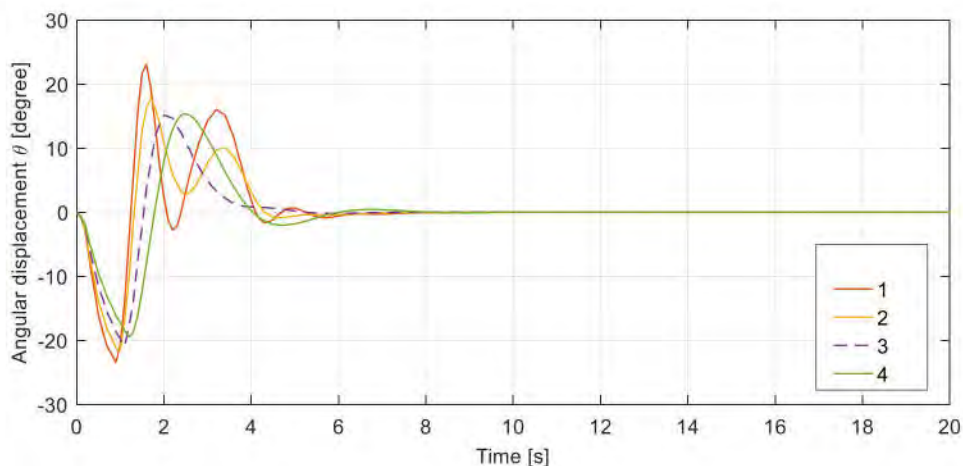
Во споредба со другите симулации, поконкретно со симулацијата број 1 (чисто управување за следење), симулацијата број 3 резултира со добивање на подобро следење на квадрокоптерот во x , y -правците. Така што, времето на подигање е скоро исто, но прескокот (overshoot) и времето на смирување се минимизирани.



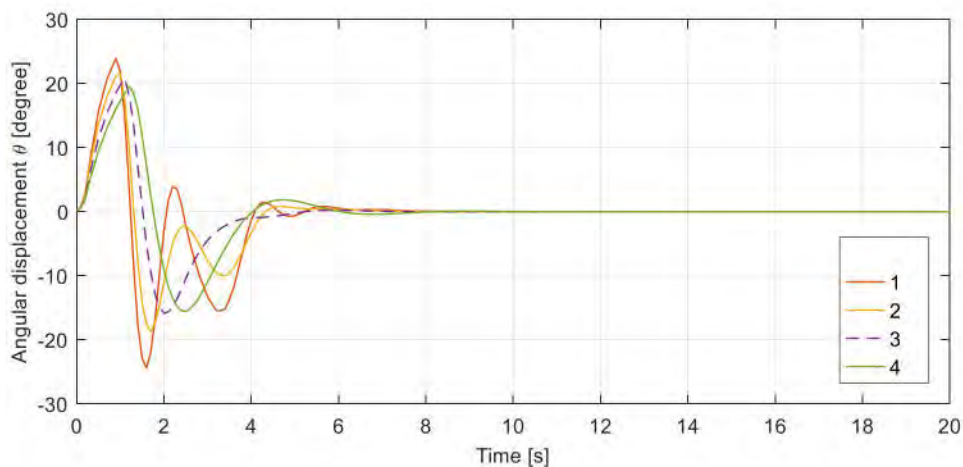
Слика 34. Линеарно поместување во z -оската

Според Слика Слика 34, хибридно нелинеарно управување на висината во z -правецот, за третата симулација, резултира со зголемување на времето на подигање, но времето на смирување останува скоро исто. Ако го продолжиме зголемувањето на магнитудата α и истовремено ја намалиме магнитудата на управувањето за следење, т.е., го намалиме γ , како во симулацијата со број 4, очигледно е дека се појавува значително поголемо

време на конвергенција. Според тоа, ако задачата на квадрокоптерот е да достигне извесна точка во просторот, но почетната точка не е од земјата (throwing), тогаш хибридното управување на положбата ќе се “извлече“ и ќе достигне стабилизација на UAV -то, но ќе ја изгуби висината, заради подолгото време на реакција на нелинеарниот хибриден управувач на висината.

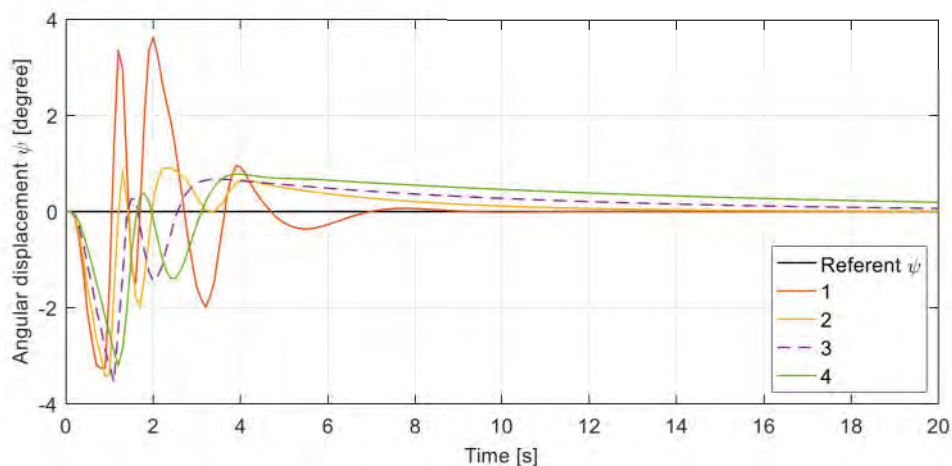


Слика 35. Аголно поместување ϕ



Слика 36. Аголно поместување θ

Со анализа на Слика 35 и Слика 36, со споредба меѓу чистото управување на следење со стабилизација, и хибридното управување за стабилизација (број на симулација 3) се покажува дека последново ја подобрува стабилизацијата на квадрокоптерот со редуцирање на отстапувањето на ориентацијата.

Слика 37. Аголно поместување ψ

Дури иако саканиот агол на завртување е $\psi_d = 0$, заради нелинеарната динамика на квадрокоптерот, на Слика Слика 37 постојат мали осцилации на аголот на завртување на платформата, во сите симулации. Сепак, таквите мали осцилации нема да бидат проблем за задачите во отворен простор, освен во случаите кога задачата на дронот треба да се изведе во опасна средина во отворен простор, каде и мали отстапувања на алглите не се дозволени. Од Сликата Слика 37, може да се види дека нелинеарното хибридно управување за стабилизација обезбедува “помазен” одзив и исто така ги редуцира осцилациите на платформата (да се види симулација број 3).

7.6 Заклучок

Во оваа глава е разработен нов пристап за претставување на квадрокоптерот како нелинеарен дескрипторски систем. Конструиранио е нелинеарно стабилизирачко управување врз основа на стабилност на Љапунов примената за нелинеарен дескрипторски систем. Исто така, резултатите се проверени со нумеричка симулација на апликацијата за стабилизација на квадрокоптерот. Презентираните нумерички резултати покажуваат дека стабилизацијата на квадрокоптерот се подобрува со воведување на хибридно стабилизирачко управување (управување за следење + управување за стабилизација, изведени од условите за стабилност слични на условите за стабилност на Љапунов).

Со намалување на управувачката магнитуда на следење и истовремено зголемување на управувачката магнитуда за стабилизацијата, се појавува поголемо време на конвергенција, што е единствен недостаток на овој метод.

Глава 8

Заклучок и идна работа

8.1 Заклучок

Со оглед на тоа дека не постои ефикасен начин за директно решавање на равенката на дескрипторскиот систем, во оваа теза, претставивме практична методологија за решавање на управувачките проблеми со дескрипторска генерализирана постројка. Разработената методологија во Теорема 3.1 може да се примени без оглед дали дескрипторската генерализирана постројка е регуларна или ирегуларна, поради предложената алгоритамска трансформација на проблемот со генерализирана дескрипторска постројка во проблем со генерализирана постројка во состојбен простор. Потоа, со користење на постојните методи го решаваме трансформираниот проблем во состојбен простор.

Понатаму, дефинирани се условите за регуларност за управувачките проблеми со генерализирана дескрипторска постројка, а во Теорема 3.2 докажано е дека дескрипторската GP е регуларна ако и само ако трансформираната генерализирана постројка во состојбен простор (која се добива со алгоритам за трансформација дефиниран во Теорема 3.1) е регуларна. Поради едноставноста и општоста на Теоремата 1, понатамошната елаборација за техниките за решавање на управувачките проблеми со дескрипторска генерализирана постројка, во иднина се чини неоправдано.

Понатаму, прилагодени се две методологии за тоа како да се избегнат коефициентите со големи вредности во управувачот, "брзите модови" и не-робустноста на стабилност, на дескрипторската генерализирана постројка, преку подлабоко разбирање на тоа како таквите проблеми не се робустни при мали промени на коефициентите на управувачот

или постројката. Последниов ефект се појавува во околина на инфималниот параметар γ при решавањето на \mathcal{H}_∞ -управувачкиот проблем $\|H\|_\infty \leq \gamma$ каде H е преносна матрица на системот затворен со повратна спрега. Првата методологија, којашто е поопшта, е заснована на трудот (Stefanovski J. D., 2015), а втората е дадена во Поглавјето 3.5, и е базирана на решавање на SOF проблем и дво-блоков проблем, и резултира со управувач со редуциран ред на реализација.

Покрај тоа, во Поглавјето 3 се покажа, со помош на нумерички пример, дека дескрипторската генерализирана постројка може не е регуларна, иако матриците D_{12} и D_{21} имаат полни рангови. Во друг нумерички пример е покажано дека дескрипторската генерализирана постројка може да е регуларна, иако матриците D_{12} and D_{21} немаат полни рангови.

Придонесот на оваа теза опфаќа исто така и стабилност на нелинеарните дескрипторски системи, проследено со дизајнирање на нелинеарно стабилизирачко управување, врз основа на теоријата за стабилност на Љапунов прилагодена за нелинеарен дескрипторски систем. Повеќето од овие резултати се прилично практични, бидејќи тие не бараат да се решаваат нелинеарни диференцијални равенки и нелинеарни алгебарски равенки, со оглед на тоа што користењето на овие нови резултати бара само диференцијација на функции.

Покрај тоа, елабориран е нов пристап за претставување на квадрокоптер како нелинеарен дескрипторски систем. За имплементација и тестирање на теоретските придонеси за стабилизација на нелинеарниот дескрипторски систем, развиена е симулациона средина, врз основа на MATLAB Simulink. Сите процеси, почнувајќи од развојот на физичкиот систем на квадрокоптерот, а потоа и мерењата на вистинските параметри од физичките делови, се елаборирани со цел да се добие точен динамички модел. Потоа е опишан процесот на добивање на нелинеарен модел на квадрокоптер, поаѓајќи од динамиката на круто тело. Потоа се линеаризира моделот и се дизајнираат каскадни линеарни управувачи за следење врз основа на PID-PD и PID-MPC.

Се докажува дека дизајнираниот управувач на летање е во можност да го стабилизира квадаторот и да следи различни траектории (случаи кога $\psi \neq 0$) со минимална грешка, кога се користи линеарен модел на квадатор. Симулацијата со две различни задачи за следење на траекторијата (втората вклучува нарушувања од налети на ветар), покажа дека и двете обезбедуваат добро и непречено следење. Но управувањето на следење со каскадно PID-MPC управување е малку подобро во следењето на референтните

траектории, дури и во присуство на периодични нарушувања. Со цел да бидеме пореални, поради употребата на Pixhawk (електронски модул кој е стандарден управувач на летање којшто се користи воглавном во сите комерцијални и истражувачки апликации на воздухопловните возила), којшто нема многу голема процесорска моќ и неговото внатрешно каскадно управување главно се базира на PID -PD, користевме каскадна PID-PD управувачка структура за изградба на хибриден нелинеарен управувач.

Во симулационата средина се демонстрира примената на хибридно нелинеарно управување на стабилизацијата на квадрокоптер. Презентираните нумерички резултати покажуваат дека стабилизацијата на квадрокоптерот е подобрена со воведување хибридностабилизирачко управување (управување на следење + управување на стабилизација, добиени од условите на стабилноста слични на оние на Љапунов). Така, резултатите потврдуваат дека теоретското влијание не е ограничено само на квадрокоптер, туку може да се поттикнат евентуално проширувања на други апликации во иднина.

Недостаток на овој метод е тоа што со намалување на управувачката магнитуда за следење и истовремено зголемување на управувачката магнитуда за стабилизација, се појавува поголемо време на конвергенција.

Со оглед на истражувањето спроведено во оваа дисертација и добиените резултати од симулацијата, заклучокот за работната хипотеза е следен:

- Хипотезата X_1 , X_2 и X_3 успешно се докажа како точна. Додека помошната хипотеза се покажа дека е неточна, бидејќи иако квадрокоптерот е конзервативен систем, стабилизацијата и следењето на квадрокоптерот е подобрена со методот на хибридно управување.

8.2 Сугестии за идна работа

Сугестиите и идната работа ќе бидат со следниот фокус:

- Подобрување на алгоритмот за стабилизација на квадрокоптерот кога се намалуваат магнитудите на каскадното управување, т.е. намалување на магнитудата γ , и зголемување на магнитудите на α и β .
- Автоматско подесување на параметрите на хибридно нелинеарно управување, заради подобра стабилизација,
- Имплементација на хибридно нелинеарно управување за следење на траекторија,
 - Покрај стабилизацијата во точка, да се споредат резултатите со задачата за чисто следење со помош на PID-PD управување, и исто така за следење на траекторија,
 - Споредување на резултатите со PID-MPC линеарниот каскаден управувач на различни траектории во присуство на нарушувања од типот налет на ветар.
- Имплементација на дизајнираното управување на реален квадротор со “плус“ конфигурација, и обсервирање на реалните перформанси со сензори, при пратење на сакани траектории.
- Возможно е да се прошири апликацијата на имплементација на стабилизирачко управување и на други типови на летала.

Библиографија

- Araar, O. & Aouf, N. (2014). Full linear control of a quadrotor UAV, LQ vs H_∞ . In *2014 UKACC International Conference on Control, CONTROL 2014 - Proceedings*.
- Astrom, K. J. & Kumar, P. R. (2014). Control: A perspective. *Automatica*, 50, 3–43.
- Benner, P., Byers, R., Losse, P., Mehrmann, V., & Xu, H. (2011). Robust formulas for optimal H_∞ controllers. *Automatica*, 47, 2639–2646.
- Benner, P., Byers, R., Mehrmann, V., & Xu, H. (2007). A robust numerical method for the γ -iteration in control H_∞ . *Linear Algebra and its Applications*, 425, 548–570.
- Bi, Y., Lan, M., Li, J., Zhang, K., Qin, H., Lai, S., & Chen, B. M. (2017). Robust autonomous flight and mission management for mavs in gps-denied environments. In *IEEE Asian Control Conference (ASCC)*, (стр. 67–72). IEEE.
- Bouabdallah, S., Noth, A., & Siegwart, R. (2004). PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (стр. 2451–2456). IEEE.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam.
- Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B., & Egeland, O. (2007). *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Application*. Springer Ltd.
- Bunjaku, D., & Stankovski, M. (2017). The system identification in industrial control: Case study on the differential wheeled mobile robot. *IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA*.
- Bunjaku, D., Nadzinski, G., Stankovski, M., & Stefanovski, J. (2018). Dynamic Modeling and Flight Control Design for Multicopter. *International Review of Aerospace Engineering (I.RE.AS.E)*, 11(5), 224-235.
- Bunjaku, D., Stefanovski, J. D., Dimirovski, G., Juričić D. (2019). New Approach on Solving Control Problems with Descriptor Systems. *Journal of The Franklin Institute (Accepted, in publishing)*, 356(6), 3270-3289.

- Bunjaku, D., Stefanovski, J. D., & Dimirovski, G. M. (2018). Regularity conditions for control problem with descriptor systems. *In 14th IEEE International Conference on Control & Automation (ICCA)*, (стр. 130–135). IEEE.
- Bunjaku, D., Stefanovski, J., & Dimirovski, G. (2019). Stability of nonlinear descriptor systems and application to stabilization of quadcopters. *Acta Polytechnica Hungarica (In reviewing process)*, xx-xx.
- Bunjaku, D., Stefanovski, J., & Stankovski, M. (2017). Dynamic modeling and asymptotic point stabilization control of two differential wheeled mobile robot. *Journal of Electrical Engineering and Information Technologies - JEEIT*, 1(1-2), 25-35.
- Byrnes, C. I., Isidori, A., & Willems, J. C. (1991). Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 36, 1228–1240.
- Cai, G., Chen, B. M., & Lee, T. H. (2011). *Unmanned rotorcraft systems*. Springer.
- Campbell, S. L., Nikoukhah, R., & Delebecque, F. (1999). *Nonlinear descriptor systems*. Springer.
- Dai, S.-L., Zhao, J. J., & Dimirovski, G. M. (2009). A descriptor system approach to robust h1 control for linear systems with time-varying uncertainties. *International Journal of Systems Science*, 40, 1293–1306.
- Deskovski, S., Sazdovski, V., & Gocovski, Z. (2016). Guidance Laws and Navigation Systems for Quadrotor UAV: Theoretical and Practical Findings. In G. M. Dimirovski, Editor, *Complex Systems: Relationship between Control, Communications and Computing, Studies in Systems, Decision and Control 55*. Cham, CH: Springer International AG, May, Chapter 3.6 , стр. 381 -389..
- Dief, T. N., Kamra, M. M., & Yoshida, S. (2017). Modeling, system identification, and pid-a controller for tethered unmanned quad-rotor helicopter. *International Review of Aerospace Engineering*, 10, 215–223.
- Dief, T. N., Kassem, A. H., & Baioumi, G. M. E. (2014a). Modeling and attitude stabilization of indoor quad rotor. *International Review of Aerospace Engineering*, 7, 43–47.
- Dief, T. N., Kassem, A. H., & Baioumi, G. M. E. (2014b). Modeling, robustness, and attitude stabilization of indoor quad rotor using fuzzy logic control. *International Review of Aerospace Engineering*, 7, 197–201.

- Dong, X.-z. & Xiao, M. (2015). H_∞ control of singular systems via delta operator method. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 13, 643–651.
- Dooren, P. V. (1979). The computation of kronecker's canonical form of a singular pencil. *Linear Algebra and Its Applications*, 27, 103–140.
- Duan, G. R. (2010). *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. Springer Science & Business Media.
- Feng, Y. & Yagoubi, M. (2017). *Robust control of linear descriptor systems*. Springer.
- Feng, Y., Yagoubi, M., & Chevrel, P. (2011). Parametrization of extended stabilizing controllers for continuous-time descriptor systems. *Journal of the Franklin Institute*, 348, 2633–2646.
- Fradkov, A. (2003). Passification of non-square linear systems and feedback yakubovichkalman-popov lemma. *European Journal of Control*, 9, 577–586.
- Franco, P. D., Scarsiotti, G., & Astolfi, A. (2017). A note on the stability of nonlinear differential-algebraic systems. *IFAC PapersOnLine*, 50, 7421–7426.
- Gahinet, P. (1992). Reliable computation of H_∞ central controllers near the optimum. In *Proceedings of American Control Conference*, (стр. 738–742). IEEE.
- Gahinet, P. & Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4, 421–448.
- Ganga, G. & Dharmana, M. M. (2017). Mpc controller for trajectory tracking control of quadcopter. In *IEEE International Conference on Circuit, Power and Computing Technologies (ICCPCT)*, (стр. 1.6). IEEE.
- Goel, R., Shah, S. M., Gupta, N. K., & Ananthkrishnan, N. (2009). Modeling, simulation and flight testing of an autonomous quadrotor. In *Proceeding ICEAE*, (стр. 1–7).
- Hamel, T., Mahony, R., Lozano, R., & Ostrowski, J. (2002). Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. In *IFAC Proceedings Volumes (IFACPapersOnline)*.
- Harris, C. M. & Piersol, A. G. (2002). *Harris' shock and vibration handbook*. McGraw-Hil.
- Hermann, R. & Krener, A. (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on automatic control*, 22(5), 728–740.

- Hill, D. J. & Moylan, P. J. (1980). Dissipative dynamical systems: Basic inputoutput and state properties. *Journal of the Franklin Institute*, 309, 327–357.
- Iggidr, A., Kalitine, B., & Outbib, R. (1996). Semidefinite lyapunov functions stability and stabilization. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 9, 95–106.
- Inoue, M., Wada, T., Ikeda, M., & Uezato, E. (2015). State-space ∞ controller design for descriptor systems. *Automatica*, 59, 164–170.
- Ishihara, J. Y. & Terra, M. H. (2001). Impulse controllability and observability of rectangular descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46, 991 – 994.
- Junior, J. C. V., Paula, J. C. D., Leandro, G. V., & Bonfim, M. C. (2013). Stability control of a quad-rotor using a PID controller. *Journal of Applied Instrumentation and Control*, 1, 15–20.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems, (3rd Edition)*. Prentice Hall. Kokotovi'c, P. & Arcak, M. (2001). Constructive nonlinear control: A historical perspective. *Automatica*, 37, 637–662.
- Larsen, M., Jankovi'c, M., & Kokotovi'c, P. V. (2003). Coordinated passivation designs. *Automatica*, 39, 335–341.
- Liu, Y., Stojanovski, G. S., Stankovski, M. J., Dimirovski, G. M., & Zhao, J. (2011). Feedback passivation of switched nonlinear systems using storage-like functions. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 9, 980–986.
- Losse, P. & Mehrmann, V. (2008). Controllability and observability of second order descriptor systems. *SIAM journal on control and optimization*, 47, 1351–1379.
- Luenberger, D. G. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22, 312 – 321.
- Lurye, A. I. (1951). Certain nonlinear problems in the theory of automatic control (in russian, nekatorie nelineynie zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya). *Automat. and telemech*, 13, 610–614.
- Ma, D. & Dimirovski, G. M. (2016). Passivity-based switching rule and control law co-design of networked switched systems with feedback delays. In G. M. Dimirovski, Editor, *Complex Systems: Relationship between Control, Communications and Computing*,

- Studies in Systems, Decision and Control 55*. Cham, CH: Springer International AG, May, Chapter 1.6, стр. 119–140.
- Marir, S., Chadli, M., & Bouagada, D. (2017). A novel approach of admissibility for singular linear continuous-time fractional-order systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15, 959–964.
- Masubuchi, I. (2007). Output feedback controller synthesis for descriptor systems satisfying closed-loop dissipativity. *Automatica*, 43, 330–345.
- Muller, P. C. (2000). Descriptor systems: pros and cons of system modelling by differential-algebraic equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 53, 273–279.
- Muller, P. C. (2005). Modelling and control of mechatronic systems by the descriptor approach. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 43, 593–607.
- Phang, S. K., Lai, S., Wang, F., Lan, M., & Chen, B. M. (2014). UAV calligraphy. In *11th IEEE International Conference on Control & Automation (ICCA)*, (стр. 422–428). IEEE.
- Phang, S. K., Lai, S., Wang, F., Lan, M., & Chen, B. M. (2015). Systems design and implementation with jerk-optimized trajectory generation for UAV calligraphy. *Mechatronics*, 30, 65–75.
- Phang, S. K., Li, K., Yu, K. H., Chen, B. M., & Lee, T. H. (2014). Systematic design and implementation of a micro unmanned quadrotor system. *Unmanned Systems*, 2, 121–141.
- Quan, Q. (2017). *Introduction to multicopter design and control*. Springer.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G., & Rubio, F. R. (2008). Mpc with nonlinear H_∞ control for path tracking of a quad-rotor helicopter. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 8564–8569.
- Saberi, A., Kokotovic, P., & Sussmann, H. (1990). Global stabilization of partially linear composite systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28, 1491–1503.
- Salle, P. C. L. & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. Academic Press New York.
- Sorensen, A. (2010). Autonomous control of a miniature quadrotor following fast trajectories. *Control Engineering Department, Aalborg University, Aalborg, Denmark*.

- Stefanovski, J. D. (2000). Infinite-dimensional conservative systems and a conservativity condition for the saint-venant equations. *International Journal of Control*, 73, 1224–1234.
- Stefanovski, J. D. (2010). Singular H₂ control of discrete-time systems: From frequency to time domain. *International Journal of Robust and Nonlinear*, 20, 1930–1944.
- Stefanovski, J. D. (2011). New results and application of singular control. *IEEE Transections on Autmatic Control*, 56, 632–637.
- Stefanovski, J. D. (2015). H_∞ problem with nonstrict inequality and all solutions: Interpolation approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 53, 1734–1767.
- Stefanovski, J. D. (2018). Strongly (j, j')-lossless rational matrices and H_∞ problem. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 28, 1–26.
- Stefanovski, J. D. & Dimirovski, G. M. (2006). A new approach to static output feedback stabilization of linear dynamic systems. *International Journal of Systems Science*, 37, 643–662.
- Stevens, B. L., Lewis, F. L., & Johnson, E. N. (2015). *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. John Wiley & Sons.
- Sun, L. Y., Zhao, J., & Dimirovski, G. M. (2009). Adaptive coordinated passivation control for generator excitation and thyristor controlled series compensation system. *Control Engineering Practice*, 17, 7660–772.
- Sussmann, H. J. & Kokotovic, P. V. (1991). The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 424–440.
- Syrmos, V. L., Abdullah, C. T., Dorato, P., & Grigoriadis, K. (1997). Static output feedback - a survey. *Automatica*, 33, 125–137.
- Takaba, K. & Katayama, T. (1998). H₂ output feedback control for descriptor systems. *Automatica*, 34, 841—850.
- Takaba, K., Morihira, N., & Katayama, T. (1994). H_∞ control for descriptor systems - a j-spectral factorization approach. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, (стр. 2251–2256). IEEE.

- Takaba, K., Morihira, N., & Katayama, T. (1995). A generalized lyapunov theorem for descriptor system. *Systems and Control Letters*, 24, 49–51.
- Wang, K., Ke, Y., & Chen, B. M. (2016). Development of autonomous hybrid UAV u-lion with VTOL and cruise flying capabilities. In *IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, (стр. 1053–1060). IEEE.
- Wang, P., Man, Z., Cao, Z., Zheng, J., & Zhao, Y. (2016). Dynamics modelling and linear control of quadcopter. In *2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS)*, (стр. 498–503). IEEE.
- Watada, T. & Ikeda, M. (2004). Absolute stability criteria for multivariable lurye systems with asymmetric nonlinearities. In *Proceedings of the 10th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP Symposium on Large Scale Systems Theory and Applications*, (стр. 475–481). Pegamon Elsevier Science.
- Watada, T., Ikeda, M., Ohta, D., & Siljak, D. (2000). Parametric absolute stability of multivariable lurye systems. *Automatica*, 36, 1365–1372.
- Watada, T., Ikeda, M., & Uezato, E. (2006). Stability theory for descriptor systems with non-smooth nonlinearities. In *Proceedings of the 17th SIAM International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, (стр. 1626–1631). Kyoto University and the SIAM.
- Watada, T., Ikeda, M., & Uezato, E. (2008). Absolute stability of multivariable lurye-type descriptor systems. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, (стр. 6021–6026). Seoul National University and the IFAC.
- Willems, J. C. (1972a). Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive of Rational Mechanics Analysis*, 45, 321–352. Willems, J. C. (1972b). Dissipative dynamical systems, part ii: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive of Rational Mechanics Analysis*, 45, 352–393.
- Xin, X., Hara, S., & Kaneda, M. (2008). Reduced-order proper H_∞ controllers for descriptor systems: Existence conditions and LMI-based design algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53, 1253–1258.
- Xu, S. & Lam, J. (2006). *Robust control and filtering of singular systems*. Springer.

- Yakubovich, V. A. (1962). Solution to some matrix inequalities encountered in the theory of automatic control (in russian). *Dokladi akademii nauk SSSR*, 143, 1304–1307.
- Yakubovich, V. A. (1971). S-procedure in the nonlinear theory of automatic control (in russian). *Vestnik Lningradskogo Gosudarstvennogo Universsiteta, Seriya Matematika, mehanika, aeronimiya*, 1, 62–77.
- Yakubovich, V. A. (1984). Optimiazation and invariance in linear stationary control systems (in russian). *Avtomatika i Telemekhanika*, 8, 5–44.
- Yang, C., Sun, J., Zhang, Q., & Ma, X. (2013). Lyapunov stability and strong passivity analysis for nonlinear descriptor systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 60, 1003 – 1012.
- Zhang, X., Xian, B., Zhao, B., & Zhang, Y. (2015). Autonomous flight control of a nano quadrotor helicopter in a GPS-denied environment using on-board vision. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(10), 6392–6403.
- Zhao, J. & Hill, D. J. (2008). Dissipativity theory for switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53, 941–953.
- Zhou, K., Doyle, J. C., & Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall.

Публикации

- Bunjaku, D., & Stankovski, M. (2017). The system identification in industrial control: Case study on the differential wheeled mobile robot. *IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA*.
- Bunjaku, D., Nadzinski, G., Stankovski, M., & Stefanovski, J. (2018). Dynamic Modeling and Flight Control Design for Multicopter. *International Review of Aerospace Engineering (I.RE.AS.E)*, 11(5), 224-235.
- Bunjaku, D., Stefanovski, J. D., Dimirovski, G., Juričić D. (2019). New Approach on Solving Control Problems with Descriptor Systems. *Journal of The Franklin Institute (Accepted, in publishing)*, 356(6), 3270-3289.
- Bunjaku, D., Stefanovski, J. D., & Dimirovski, G. M. (2018). Regularity conditions for control problem with descriptor systems. *14th IEEE International Conference on Control & Automation (ICCA)* (стр. 130-135). Anchorage, Alaska: IEEE.
- Bunjaku, D., Stefanovski, J., & Dimirovski, G. (2019). Stability of nonlinear descriptor systems and application to stabilization of quadcopters. *Acta Polytechnica Hungarica (In reviewing process)*, xx-xx.
- Bunjaku, D., Stefanovski, J., & Stankovski, M. (2017). Dynamic modeling and asymptotic point stabilization control of two differential wheeled mobile robot. *Journal of Electrical Engineering and Information Technologies - JEEIT*, 1(1-2), 25-